№203

Країна мрій

Алгебра 10

в таблицах

Роева Т.Г.
Хроленко Н.Ф.

Т.Г. Роева, Н.Ф. Хроленко

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА В ТАБЛИЦАХ

10 класс

Учебное пособие

Одобрено комиссией по математике Научно-методического совета Министерства образования и науки Украины

Харьков
2005

УДК 373.167.1:512+512 (075.3)

ББК 22.14 я 721

Р 62

Роева Т. Г., Хроленко Н. Ф. Алгебра и начала анализа в таблицах. 10 класс: Учеб. пособие. 3-е изд., испр., доп. – Х.: Країна мрій™, 2005. – 156 с.

Пособие содержит основные теоретические вопросы курса алгебры 10 класса в соответствии с действующей программой. Рассмотрены решения типовых задач каждой темы. Подобраны тренировочные упражнения, самостоятельные и контрольные работы ко всем разделам. Самостоятельные и контрольные работы имеют три уровня сложности. К большинству задач даны ответы. В рубрике «Страничка абитуриента» приведены решения задач повышенной сложности, это поможет подготовиться к вступительным экзаменам.

Пособие адресовано учащимся и учителям общеобразовательных школ, абитуриентам.

Посібник містить основні теоретичні питання курсу алгебри 10 класу відповідно до чинної програми. Розглянуті розв'язання типових задач кожної теми. Підібрані тренувальні вправи, самостійні і контрольні роботи до всіх розділів. Самостійні та контрольні роботи мають три рівні складності. До більшості задач надані відповіді. В рубриці «Сторінка абітурієнта» подані розв'язання задач підвищеної складності, що допоможе підготуватися до вступних іспитів.

Посібник адресований учням та вчителям загальноосвітніх шкіл, абітурієнтам.

Одобрено комиссией по математике Научно-методического совета Министерства образования и науки Украины (протокол заседания комиссии по математике от 14 октября 2003 г. № 5)

Учебное пособие

Роева Татьяна Григорьевна

Хроленко Наталья Федоровна

Алгебра и начала анализа в таблицах

10 класс

Редактор Томашевская Н. В.
Корректор Ольховская М. А.
Компьютерная верстка Цепотан А. Н.
Дизайн обложки Терлецкий А. В.

Подписано к печати 21.09.2005 г. Формат 60x90/8.
Бумага офсет. Печать офсет.

Издатель Халимон В.Т.
Регистр. свид. ДК № 1249 от 27.02.2003 г.
61146, г. Харьков, а/я 2656, тел. 58-50-70

ISBN 966-8368-79-7

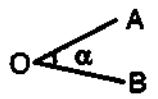
© Роева Т. Г., 2005.
© Хроленко Н. Ф., 2005.
© Терлецкий А. В., худож. оформление, 2005.
© Країна мрій™, 2005.

Содержание

§1. Тригонометрические функции и их свойства..... 4
§2. Тригонометрические уравнения..... 34
§3. Тригонометрические неравенства..... 55
§4. Степенная функция.
Иррациональные уравнения и неравенства..... 73
§5. Показательная функция.
Показательные уравнения и неравенства..... 106
§6. Логарифмическая функция.
Логарифмические уравнения и неравенства..... 125
Ответы..... 149

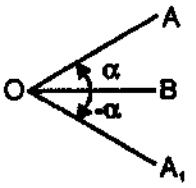
§ 1. Тригонометрические функции и их свойства

Угол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки (вершины угла).



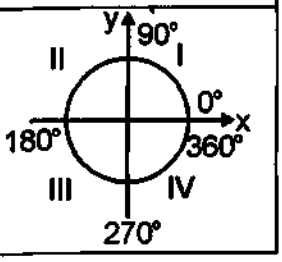
$\angle AOB = \alpha$

Угол можно рассматривать как фигуру, образованную вращением луча около своей начальной точки 0. Причем вращение против часовой стрелки называют **положительным**, а по часовой стрелке — **отрицательным**.



$\angle AOB = \alpha$
$\angle A_1OB = -\alpha$

Полный оборот луча вокруг начальной точки образует полный угол (окружность).
Оси координат Ox и Oy разбивают окружность (полный угол) на четыре четверти.



Связь между радианной и градусной мерами угла

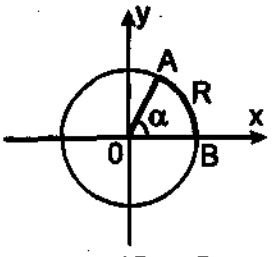
Углы измеряются в градусах и радианах.

1° — это угол, который равен $\frac{1}{360}$ части полного оборота луча вокруг своей начальной точки в положительном направлении (против часовой стрелки).

1° = 60′ (60 минут);
1′ = 60″ (60 секунд)

1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности.

$1° = \frac{\pi}{180}$; 1 радиан $= \frac{180°}{\pi}$.



$\cup AB = R$
$\alpha = 1$

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Определения тригонометрических функций и их простейшие свойства

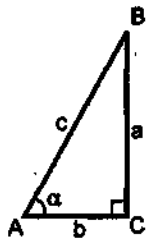
Через прямоугольный треугольник (для острых углов)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$tg\alpha = \frac{a}{b}$

$ctg\alpha = \frac{b}{a}$



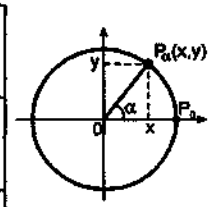
Через произвольную окружность (R — радиус окружности)

$\sin\alpha = \frac{y}{R}$

$\cos\alpha = \frac{x}{R}$

$tg\alpha = \frac{y}{x}$

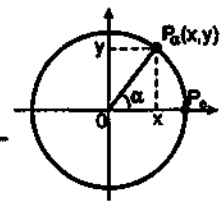
$ctg\alpha = \frac{x}{y}$



Через единичную окружность ($R = 1$)

$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α

$\cos\alpha = x$ — абсцисса точки P_α



$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

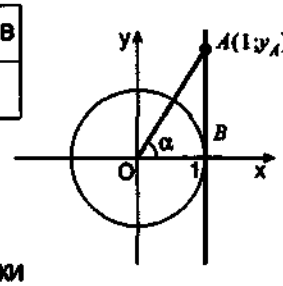
$ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Наглядное представление тангенса и котангенса в единичной окружности

AB — ось тангенсов

$AB \parallel 0y$

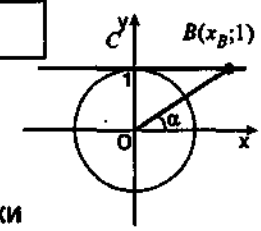
$tg\alpha = \frac{y_A}{1} = y_A$ — ордината соответствующей точки



CB — ось котангенсов

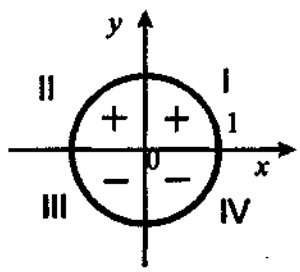
$CB \parallel 0x$

$ctg\alpha = \frac{x_B}{1} = x_B$ — абсцисса соответствующей точки

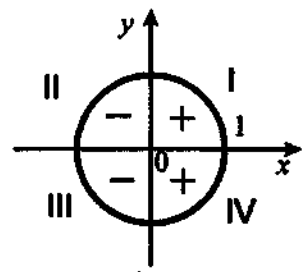


Знаки тригонометрических функций

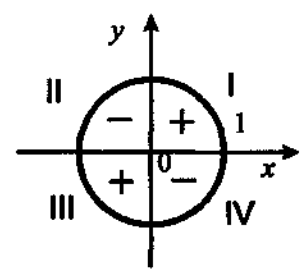
$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$tg\alpha$, $ctg\alpha$



Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	в град.	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	в рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$tg\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$		-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

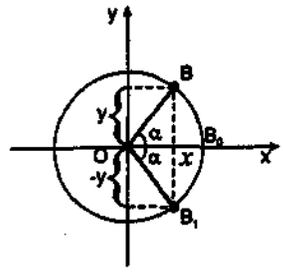
Чётность и нечётность

Функция $y = f(x)$ называется **чётной**, если для любых значений x и $(-x)$ из области определения соблюдается равенство: $f(-x) = f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется **нечётной**, если для любых x и $(-x)$ из области определения соблюдается равенство: $f(-x) = -f(x)$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



$cos(-x) = cosx$ — чётная;
$sin(-x) = -sinx$ — нечётная;
$tg(-\alpha) = -tg\alpha$ — нечётная;
$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$ — нечётная.

Периодичность тригонометрических функций

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

$y = sinx$	$T = 360° = 2\pi$
$y = cosx$	$T = 360° = 2\pi$
$y = tgx$	$T = 180° = \pi$
$y = ctgx$	$T = 180° = \pi$

Свойства периодических функций

1. Если число T — период функции, то и число $n \cdot T$, где $(n \in Z)$, — также период этой функции (T — наименьший период).

$sinx = sin(x+2\pi n),\ n \in Z$
$tg(x) = tg(x+\pi n),\ n \in Z.$

2. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = af(kx+b)$ — также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$, где $(a, b, k$ — постоянные числа и $k \neq 0)$.

$y = 3cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 3cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right);$
$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$
$y = 2ctg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right);\ T = \frac{\pi}{3}.$

Формулы приведения

Соотношения, у которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha,\frac{3\pi}{2}\pm\alpha,\ 2\pi\pm\alpha$ выражаются через $\sin\alpha,\cos\alpha,tg\alpha,ctg\alpha$, называются **формулами приведения**.

$$\sin 1940^\circ = \sin(360^\circ\cdot 5+140^\circ) =$$
$$= \sin 140^\circ = \sin(180^\circ-40^\circ) = \sin 40^\circ.$$
$$\cos\frac{389\pi}{18} = \cos\left(21\pi+\frac{11}{8}\pi\right) =$$
$$= \cos\left(2\pi\cdot 10+\pi+\frac{11}{18}\pi\right) =$$
$$= \cos\left(\pi+\frac{11}{18}\pi\right) = -\cos\frac{11}{18}\pi =$$
$$= -\cos\left(\pi-\frac{7}{18}\pi\right) = -\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right) = \cos\frac{7\pi}{18}.$$

Основные формулы приведения

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
tgx	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$
$ctgx$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$

Формулы дополнительных углов

Два угла называют **дополнительными**, если их сумма равна $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$.

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad tg\alpha = ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad ctg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Основные тригонометрические тождества

1.	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1.$
2.	$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$
3.	$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha.$
4.	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$
5.	$\cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1.$
6.	$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
7.	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$
8.	$1+ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha.$
9.	$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = 1.$
10.	$tg\alpha\cdot ctg\alpha = 1.$

Упростить выражения:

а) $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+ctg^2\alpha)\sin^2\alpha =$

$= (1+ctg^2\alpha)\sin^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = 1;$

б) $\cos^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta = \cos^2\beta(1-\sin^2\beta) =$
$= \cos^2\beta\cdot\cos^2\beta = \cos^4\beta;$

в) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1 =$
$= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha) =$
$= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1;$

г) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha} =$
$= 1+\sin\alpha;$

д) $\cos\alpha\cdot tg\alpha+\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha =$
$= \sin\alpha+\sin\alpha = 2\sin\alpha.$

Формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

$$\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

$$\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z.$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi k,\quad k\in Z.$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

$$\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi k,\quad k\in Z.$$

1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение: $\sin 75° = \sin(30°+45°) =$

$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. Вычислить $\cos 15°$.

Решение: $\cos 15° = \cos(45°-30°) =$

$$= \cos 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

3. Упростить $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\alpha}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\alpha} = \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}.$

Тригонометрические функции кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} =$$

$$= \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}, \left(2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right).$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \frac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}, (2\alpha, \alpha \neq \pi n).$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha =$$

$$= 4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) =$$

$$= 3\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha =$$

$$= 4\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha.$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} =$$

$$= tg\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right), \left(\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1)\right).$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin 5x = 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^4 4t - \sin^2 4t.$$

1. Упростить выражение.

а) $tg\alpha - ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= -2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2ctg2\alpha.$$

б) $\frac{\cos 10\alpha + \sin^2 5\alpha}{\sin 10\alpha} =$

$$= \frac{\cos^2 5\alpha - \sin^2 5\alpha + \sin^2 5\alpha}{\sin 10\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 5\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 5\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}ctg5\alpha.$$

2. Найти значение выражения.

$\cos 15° - \sin 15°$.

Пусть $\cos 15° - \sin 15° = a$, тогда

$$a^2 = \cos^2 15° + \sin^2 15° - 2\sin 15°\cos 15° =$$

$$= 1 - \sin 30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

следовательно, $a^2 = \frac{1}{2}$; $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos 15°$ і $\sin 15°$ — положительные числа,

$\cos 15° > \sin 15°$, поэтому $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2};\ \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)}{2}.$$

$$1+\cos 5x = 2\cos^2\frac{5x}{2};\ 1-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$\alpha,\beta \neq \pi k,\ k \in Z.$

$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$\alpha,\beta \neq \pi k,\ k \in Z.$

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

Преобразовать в произведение:

а) $\cos 48° - \cos 12° =$

$= -2\sin\frac{48°+12°}{2}\sin\frac{48°-12°}{2} =$

$= -2\sin 30°\sin 18° = -2\cdot\frac{1}{2}\sin 18° = -\sin 18°;$

б) $\sin x + \cos 2x - \sin 3x = \sin x - \sin 3x + \cos 2x =$

$= -(\sin 3x - \sin x) + \cos 2x =$

$= -2\sin x\cos 2x + \cos 2x = \cos 2x(1 - 2\sin x) =$

$= 2\cos 2x\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 2\cos 2x\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin x\right) =$

$= 2\cos 2x\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) =$

$= 4\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right).$

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) =$

$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} =$

$= \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} =$

$= \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 2.$

Ответ: 2.

Полезно запомнить

$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$

$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

Введение вспомогательного угла

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$,
где φ определяется из условий:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

$\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos x =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

$$\sin 43^\circ\cos 19^\circ =$$
$$= \frac{\sin(43^\circ-19^\circ)+\sin(43^\circ+19^\circ)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 24^\circ + \sin 62^\circ) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos 19^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 19^\circ.$$

Формулы половинного аргумента

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k\in Z$.

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\alpha \neq \pi k,\ k\in Z$.

$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
$\alpha \neq 2\pi k,\ k\in Z$.

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\alpha \neq \pi k,\ k\in Z$.

Выразить через функции вдвое большего аргумента:

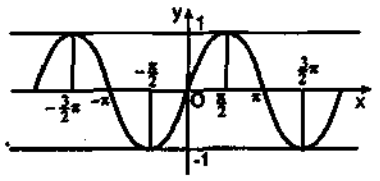
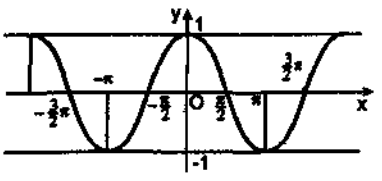
а) $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$;

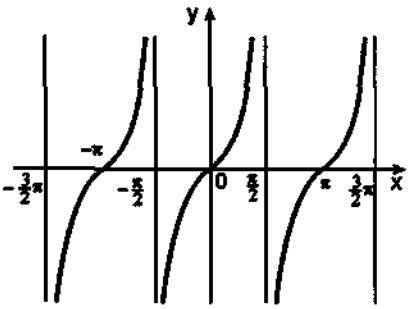
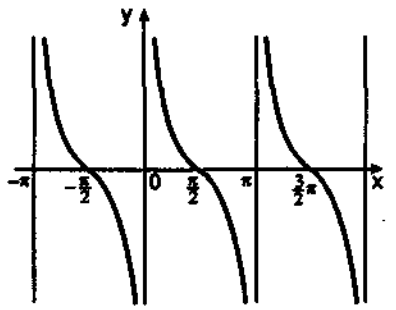
б) $\cos 5\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 10\alpha}{2}}$;

в) $tg3\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 6\alpha}{1+\cos 6\alpha}}$ или $tg3\alpha = \frac{1-\cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

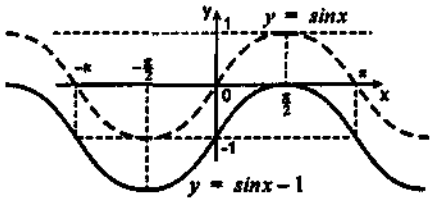
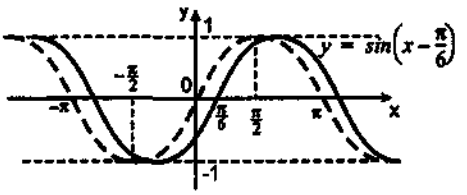
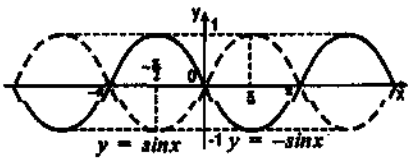
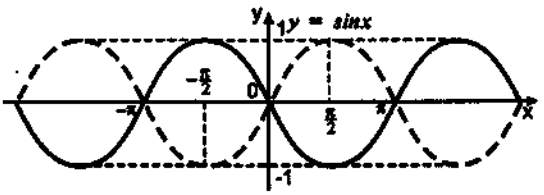
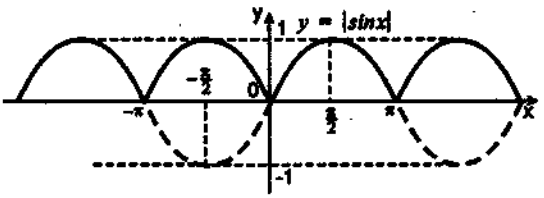
г) $ctg\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}}}$ или $ctg\frac{\alpha}{4} = \frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Тригонометрические функции, их графики и свойства

Свойства \ Функция	$y = \sin x$	$y = \cos x$
График	 кривая — синусоида	 кривая — косинусоида
Область определения	$D(\sin x) = R$	$D(\cos x) = R$
Множество значений	$E(\sin x) = [-1;1]$; $\lvert\sin x\rvert \le 1$.	$E(\cos x) = [-1;1]$; $\lvert\cos x\rvert \le 1$.
Чётность или нечётность функции	нечётная: $\sin(-x) = -\sin x$ симметрия графика относительно начала координат.	чётная: $\cos(-x) = \cos x$ симметрия графика относительно оси Oy.
Периодичность	$T = 2\pi$; $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.	$T = 2\pi$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Точки пересечения с осями координат: а) с осью Ox: б) с осью Oy:	а) $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$, б) $f(0) = \sin 0 = 0$ точка $(0;0)$.	а) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, б) $f(0) = \cos 0 = 1$ точка $(0;1)$.
Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.	$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $\cos x < 0$ при $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
Промежутки монотонности: а) функция возрастает на каждом из промежутков;	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.	$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$.
б) функция убывает на каждом из промежутков.	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.	$[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
Экстремумы	$x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $y_{max} = 1$	$x_{max} = 2\pi k$, $k \in Z$, $y_{max} = 1$.
	$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $y_{min} = -1$.	$x_{min} = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, $y_{min} = -1$.
Асимптоты графика	не имеет	не имеет

Функция / Свойства	$y = tgx$	$y = ctgx$
График	 кривая — тангенсоида	 кривая — котангенсоида
Область определения	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$	$x \neq \pi k,\ k \in Z.$
Множество значений	$E(tgx) = R.$	$E(ctgx) = R.$
Чётность или нечётность функции	нечётная: $tg(-x) = -tgx$ симметрия графика относительно начала координат.	нечётная: $ctg(-x) = -ctgx$ симметрия графика относительно начала координат.
Периодичность	$T = \pi$; $tg(x+\pi) = tgx.$	$T = \pi$; $ctg(x+\pi) = ctgx.$
Точки пересечения с осями координат: а) с осью Ox; б) с осью Oy.	а) $tgx = 0 : x = \pi k,\ k \in Z : (\pi k; 0)$, б) $f(0) = tg0 = 0$ точка $(0;0)$.	а) $ctgx = 0 : x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$; б) пересечения с Oy нет.
Промежутки знакопостоянства	$tgx > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. $tgx < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z.$	$ctgx > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $ctgx < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in Z.$
Промежутки монотонности: а) функция возрастает на каждом из промежутков;	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$	—
б) функция убывает на каждом из промежутков.	—	$(\pi k; \pi + \pi k),\ k \in Z$
Экстремумы	максимума и минимума не имеет.	максимума и минимума не имеет.
Асимптоты графика	вертикальные асимптоты $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$	вертикальные асимптоты $x = \pi k,\ k \in Z.$

Построение графиков тригонометрических функций

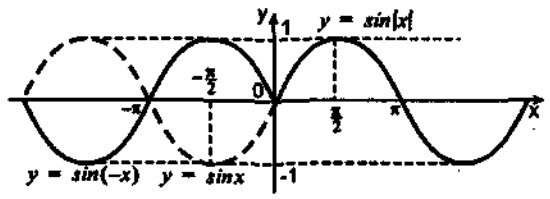
1. Для построения графика функции $y = f(x) + a$ нужно график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Oy на a единиц вверх, если $a > 0$, и на a единиц вниз, если $a < 0$.	$y = sinx - 1$ $y = sinx$ сдвигают вдоль оси Oy на единицу вниз. 
2. Для построения графика функции $y = f(x + a)$ необходимо график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Ox на a единиц вправо при $a < 0$ и на a единиц влево при $a > 0$.	$y = sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ $y = sinx$ сдвигают вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{6}$ единиц вправо. 
3. Для построения графика $y = -f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ox.	$y = -sinx$ 
4. Для построения графика $y = f(-x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ отобразить симметрично оси Oy.	$y = sin(-x)$ 
5. Для построения графика $y = \lvert f(x) \rvert$ необходимо положительную часть графика $y = f(x)$ оставить неизменной, а отрицательную часть отобразить симметрично относительно оси Ox.	$y = \lvert sinx \rvert$ 

6. Для построения графика функции $y = f(|x|)$ можно рассмотреть соотношение:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{, если } x > 0 \\ f(-x) & \text{, если } x < 0 \end{cases}$$

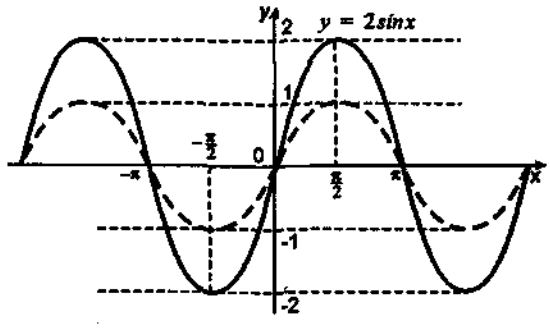
Отсюда следует, что при $x \geq 0$ необходимо строить график функции $y = f(x)$, а для $x < 0$ надо построить график, который будет симметричен для уже построенного графика относительно оси Oy.

$y = \sin|x|$



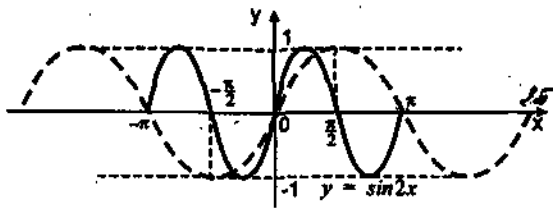
7. Для построения графика $y = kf(x)$ необходимо ординаты всех точек графика $y = f(x)$ умножить на k, оставив при этом неизменными абсциссы. Причём при $k > 1$ график $y = kf(x)$ получают из графика $y = f(x)$ растяжением его от оси Ox в k раз, а при $0 < k < 1$ — с помощью сжатия к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз. Эти деформации графика $y = f(x)$ выполняют в перпендикулярных направлениях к оси Ox.

$y = 2\sin x$



8. Для построения графика $y = f(kx), k > 0$ *необходимо все абсциссы графика* $y = f(x)$ разделить на k, оставив ординаты неизменными. То есть при $k > 1$ график $y = f(kx)$ получают из графика $y = f(x)$, сжимая его к оси Oy в k раз, а при $0 < k < 1$ растягивают график $y = f(x)$ от оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз. Эти деформации графика $y = f(x)$ выполняют в направлениях, перпендикулярных к оси Oy.

$y = \sin 2x$



УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Представить в виде произведения.

1. $\sin\frac{5\alpha}{3}+\sin\frac{3\alpha}{2}$	$\sin\frac{5\alpha}{3}+\sin\frac{3\alpha}{2}=2\sin\frac{10\alpha+9\alpha}{2\cdot3\cdot2}\cos\frac{10\alpha-9\alpha}{2\cdot3\cdot2}=2\sin\frac{19\alpha}{12}\cos\frac{\alpha}{12}.$
Ответ:	$2\sin\frac{19\alpha}{12}\cos\frac{\alpha}{12}.$
2. $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$	$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha=\sin\alpha+2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$ $=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}\right)=$ $=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}.$
Ответ:	$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}.$
3. $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$	$\sin^2\alpha-\cos^2\beta=\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1+\cos2\beta}{2}=$ $=-\frac{\cos2\alpha+\cos2\beta}{2}=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$
Ответ:	$\sin^2\alpha-\cos^2\beta=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$
4. $\sin\alpha+\cos\beta$	$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta)=$ $=2\sin\frac{\alpha+90^\circ-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-90^\circ+\beta}{2}.$
Ответ:	$\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+90^\circ-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-90^\circ+\beta}{2}.$
5. $3-4\sin^2\alpha$	$3-4\sin^2\alpha=4\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right)=4\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2\alpha\right)=$ $=4\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha\right)=4\frac{1-\cos\frac{2\pi}{3}-1+\cos2\alpha}{2}=$ $=2\left(\cos2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$
Ответ:	$3-4\sin^2\alpha=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$
6. $3-\sqrt{3}tg\alpha$	$3-\sqrt{3}tg\alpha=\sqrt{3}(\sqrt{3}-tg\alpha)=\sqrt{3}\left(tg\frac{\pi}{3}-tg\alpha\right)=$ $=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}.$
Ответ:	$3-\sqrt{3}tg\alpha=\frac{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}.$

Полезные тождества

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{4}(3+\cos 4\alpha)$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{8}(5-\cos 4\alpha)$$

$$\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\frac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$$

7. Вычислить. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$	Решение. 1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ 2) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$, то есть $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\sin 2\alpha$ $1+\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, тогда $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.
Ответ:	$\frac{7}{8}$.
8. Доказать тождество. $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$	Доказательство. $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha-1}{1-\frac{3}{4}\sin^2\alpha-1}=$ $=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$. Тождество доказано.
9. Доказать тождество. $\sin^2(\alpha-30°)+\sin^2(\alpha+30°)-\sin^2\alpha=0,5$	Доказательство. $\sin^2(\alpha-30°)+\sin^2(\alpha+30°)-\sin^2\alpha=$ $=\frac{1-\cos(2\alpha-60°)+1-\cos(2\alpha+60°)-1+\cos 2\alpha}{2}=$ $=\frac{1-2\cos 2\alpha\cos 60°+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1-\cos 2\alpha+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. $0,5=0,5$. Тождество доказано.

10. Доказать тождество. $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha} = 2\cos 2\alpha$	Доказательство. Поскольку $\sin^2 3\alpha = \frac{1-\cos 6\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2 3\alpha = \frac{1+\cos 6\alpha}{2}$, $\cos 5\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$, то $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha}{1 - \cos 4\alpha} = 2\frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{1-\cos 4\alpha} = 2\frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha}{2\sin^2 2\alpha} = 2\cos 2\alpha.$ Тождество доказано.
11. Вычислить. $\sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106° + 3$	Решение. Учтём: $\sin^2 68° = \frac{1-\cos 136°}{2}$; $\sin^2 38° = \frac{1-\cos 76°}{2}$, то $\sin^2 68° - \sin^2 38° = \frac{1}{2}(\cos 76° - \cos 136°) = \sin 106° \sin 30° = \frac{1}{2}\sin 106°$. Тогда $\sin^2 68° - \sin^2 38° - 0{,}5\sin 106° + 3 = \frac{1}{2}\sin 106° - 0{,}5\sin 106° + 3 = 3.$
Ответ:	3.
12. Вычислить. $\frac{3(\cos 20° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°}$.	Решение. $\frac{3(\cos 20° - \sin 20°)}{\sqrt{2}\sin 25°} = \frac{3(\cos 20° - \cos 70°)}{\sqrt{2}\sin 25°} = \frac{6\sin 45° \sin 25°}{\sqrt{2}\sin 25°} = 3.$
Ответ:	3.
13. Вычислить. $(tg14° + ctg28°)\cos 14° \sin 14°.$	Решение. $tg14° = \frac{\sin 14°}{\cos 14°}$; $ctg28° = \frac{\cos 28°}{\sin 28°}$, то $(tg14° + ctg28°)\cos 14° \sin 14° = \frac{\sin 14° \sin 28° + \cos 14° \cos 28°}{\cos 14° \sin 28°} \cos 14° \sin 14° = \frac{\cos 14° \cdot \cos 14° \cdot \sin 14°}{\cos 14° \sin 28°} = \frac{\sin 28°}{2\sin 28°} = \frac{1}{2}.$
Ответ:	$\frac{1}{2}$.

14. Вычислить.

$$\frac{\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}}.$$

Решение.

В знаменателе:

$$1-\cos^4\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}=$$

$$=1-\cos^2\frac{2\pi}{5}\left(\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}\right)=1-\cos^2\frac{2\pi}{5}=\sin^2\frac{2\pi}{5}$$

В числителе:

$$\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}4\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin^2\frac{2\pi}{5}.$$

Получим: $\dfrac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{2\pi}{5}}{\sin^2\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$

Полезные тождества

$$\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\sin3\alpha$$

$$\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos3\alpha$$

Вычислить.

$$\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=$$

$$=\sin10^\circ\sin(60^\circ-10^\circ)\sin(60^\circ+10^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}\sin3\cdot10^\circ=\frac{1}{4}\sin30^\circ=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

15. Существует ли выражение $\dfrac{\cos2\alpha}{\sin6\alpha-\sin2\alpha}$ при каждом из указанных значений α:

а) $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$: $\dfrac{\cos2\cdot\frac{\pi}{12}}{\sin6\cdot\frac{\pi}{12}-\sin2\cdot\frac{\pi}{12}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3}.$

Ответ: да.

б) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$: $\dfrac{\cos2\cdot\frac{\pi}{4}}{\sin6\cdot\frac{\pi}{4}-\sin2\cdot\frac{\pi}{4}}=\dfrac{0}{\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{0}{-2}=0.$

Ответ: да.

в) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{\cos2\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin6\cdot\frac{\pi}{2}-\sin2\cdot\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\cos\pi}{0}$ не имеет смысла.

Ответ: нет.

16. Упростить выражение.

$$\frac{\sin^6\alpha}{1-tg^2\alpha}+\frac{\cos^6\alpha}{1-ctg^2\alpha}=\frac{\sin^6\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}+\frac{\cos^6\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^6\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}-\frac{\cos^6\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^6\alpha\cos^2\alpha-\cos^6\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=-\frac{1}{4}\cdot4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-\frac{1}{4}\sin^22\alpha.$$

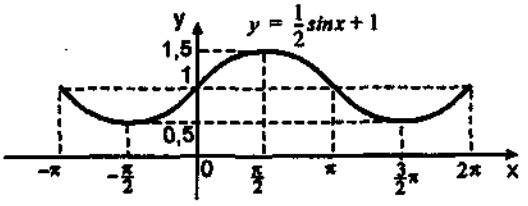
Построить графики функций.

17. $y = \frac{1}{2}sinx + 1$

1) Строим график функции $y = sinx$.

2) Сжимаем график $y = sinx$ в 2 раза к оси Ox, получим график $y = \frac{1}{2}sinx$.

3) Поднимем график $y = \frac{1}{2}sinx$ на единицу вверх вдоль оси Oy, получим график $y = \frac{1}{2}sinx + 1$.

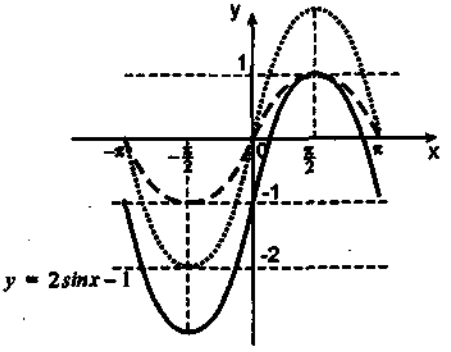


18. $y = 2sinx - 1$

1) Строим график функции $y = sinx$.

2) График функции $y = sinx$ растягиваем в 2 раза от оси абсцисс.
Получим график функции $y = 2sinx$.

3) График функции $y = 2sinx$ переносим параллельно вдоль оси ординат на одну единицу вниз. Получим график данной функции $y = 2sinx - 1$.

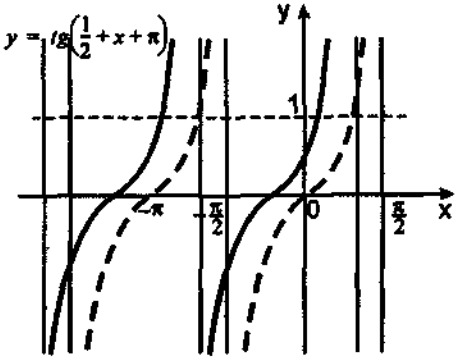


19. $y = tg\left(\frac{1}{2} + x + \pi\right) = tg\left(x + \frac{1}{2}\right)$

1) Строим график функции $y = tgx$.

2) График функции $y = tgx$ сместим вдоль оси абсцисс на $\frac{1}{2}$ единицы влево.

Получим график данной функции $y = tg\left(x + \frac{1}{2}\right)$.



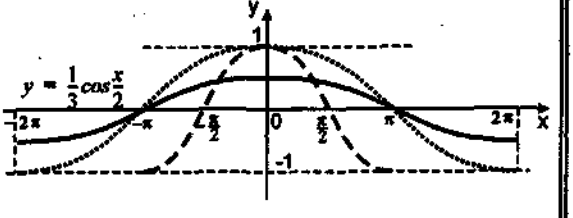
20. $y = \frac{1}{3}cos\frac{x}{2}$

1) Строим график функции $y = cosx$.

2) График функции $y = cosx$ растягиваем в 2 раза от оси ординат.

Получим график функции $y = cos\frac{x}{2}$.

3) График функции $y = cos\frac{x}{2}$ сжимаем в 3 раза к оси Ox и получим график данной функции $y = \frac{1}{3}cos\frac{x}{2}$.



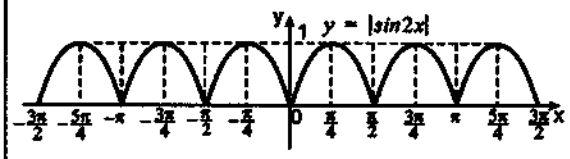
21. $y = |sin2x|$

1) Строим график функции $y = sinx$.

2) График функции $y = sinx$ сжимаем к оси ординат в 2 раза, получим график функции $y = sin2x$.

3) Часть графика $y = sin2x$, которая расположена под осью абсцисс, отобразим симметрично оси Ox.

Получим график функции $y = |sin2x|$.

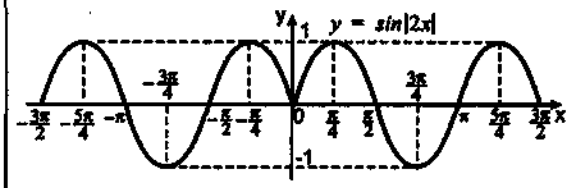


22. $y = sin|2x|$

1) Строим график функции $y = sinx$ для $x \geq 0$.

2) Сжимаем полученный график в 2 раза к оси Oy, получим график функции $y = sin2x$.

3) Отобразим полученную кривую симметрично оси Oy, получим график функции $y = sin|2x|$.



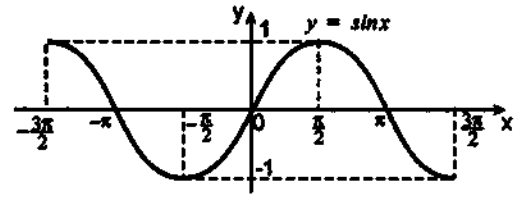
23. Построить график функции $y = 2sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

Построение.

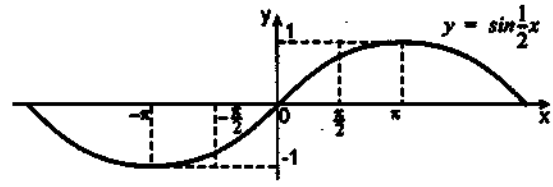
1) Преобразуем функцию.

$$y = 2sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

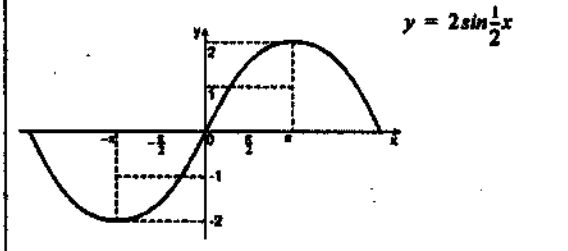
2) Построим график $y = sinx$.



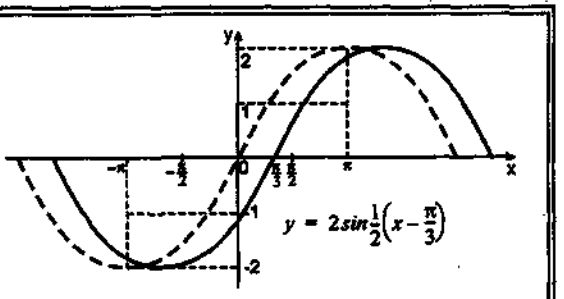
3) Построим график функции $y = sin\frac{1}{2}x$ $\left(T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi\right)$ растяжением графика $y = sinx$ от оси Oy.



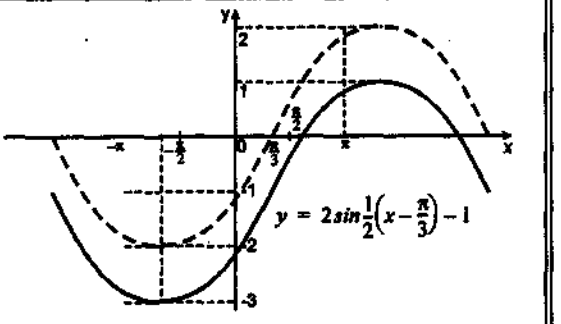
4) Построим график функции $y = 2sin\frac{1}{2}x$ растяжением графика $y = sin\frac{1}{2}x$ от оси Ox.



5) Построим график функции $y = 2sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ смещением графика $y = 2sin\frac{1}{2}x$ на $\frac{\pi}{3}$ вправо вдоль оси Ox.



6) Построим график функции $y = 2sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ смещением графика $y = 2sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ на единицу вниз.



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Два угла треугольника 30° и 45°. Найти радианную меру каждого угла треугольника.

2. Вычислить длину дуги, если радиус окружности равен 20 см, а радианная мера дуги равна:

а) 3; б) 2,4; в) $\frac{1}{2}$; г) 0,28.

3. Шкив вращается с угловой скоростью $\omega = \frac{\pi}{9}$ рад/с. За какое время он сделает полный оборот?

4. Найти радианную меру внутренних углов таких правильных многоугольников:
а) треугольника; б) шестиугольника; в) пятиугольника; г) десятиугольника;
д) четырёхугольника.

5. Величины углов треугольника относятся как 3:4:5. Найти радианную и градусную меры этих углов.

6. Может ли косинус равняться:

а) 0,87; б) $\frac{7}{5}$; в) –0,13; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{3}}$; ж) $\frac{4}{\pi}$; з) $\sqrt{5}-2$?

7. Может ли синус равняться:

а) 1,7; б) –1,7; в) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; д) 1; е) 0; ж) $\frac{5\pi}{7}$; з) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

8. При каких значениях a и b верны равенства:

а) $cos\alpha = \frac{a}{7}$; б) $sin\alpha = \frac{\pi}{a}$; в) $cosx = \sqrt{a}$; г) $tg\beta = \frac{b}{10}$; д) $sinx = \pi a$?

9. Известно, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Сравнить.

а) 2 и $2sinx$; б) $sinx$ и $2sinx$; в) $sinx$ и $sinxcosx$; г) 2 и $2cosx$; д) $cosx$ и $2cosx$;
е) $cosx$ и $cosxsinx$.

10. Верно ли равенство?

а) $2 - sin\alpha = -1,3$; б) $1 + cos\alpha = 2,7$; в) $tg\alpha - 4 = 11$; г) $sin\alpha + cos\alpha = 1$.

11. Найти область значений функции:

а) $y = 1 + \cos x$; б) $y = 1 - \sin x$; в) $y = 2 + 2\sin x$; г) $y = 5 - 3\cos x$; д) $y = 1 - |\cos x|$;

е) $y = 2 + |\sin x|$; ж) $y = 1 + |\operatorname{tg} x|$; з) $y = 3 + \frac{1}{2}\cos x$; и) $y = 6 + \cos^2 x$; к) $y = 4 - \operatorname{tg} x$.

12. Определить знак выражения.

а) $\sin 110^\circ \cos 110^\circ$; б) $\sin 70^\circ \cos 200^\circ$; в) $\operatorname{tg} 170^\circ \operatorname{ctg} 175^\circ$; г) $\cos 17^\circ - \cos 100^\circ$;

д) $\sin 130^\circ - \sin 250^\circ$; е) $-\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 65^\circ$; ж) $\sin 12^\circ - \sin 26^\circ$; з) $\cos 140^\circ - \cos 130^\circ$.

13. Найти значение выражения.

а) $3\sin 90^\circ + 3\cos 0^\circ - 1{,}2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ$;

б) $3\operatorname{tg} 0 + 2\cos 90^\circ + 3\sin 270^\circ - 3\sin 180^\circ$;

в) $\operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0 + \sin\pi + \cos\frac{\pi}{2}$;

г) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\pi - \operatorname{tg} 0$;

д) $4\sin 2\pi \cos\pi + 5\operatorname{tg}\pi + 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

14. Вычислить.

а) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ$; б) $\cos 18^\circ \cos 12^\circ - \sin 18^\circ \sin 12^\circ$;

в) $\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$; г) $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

е) $\cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)$.

15. Выразить через функции вдвое меньшего аргумента.

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\sin 6\alpha$; д) $\cos 3\alpha$; е) $\sin(\alpha + \beta)$; ж) $\cos(90^\circ + 2\alpha)$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; и) $\sin\frac{\alpha}{2}$; к) $\cos\frac{\alpha}{3}$.

16. Упростить.

а) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$; б) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; в) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$; г) $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{8}$; д) $1 - \cos 6\alpha$;

е) $1 + \cos\frac{\alpha}{2}$; ж) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; з) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; и) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$;

к) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$.

17. Какие из данных функций являются чётными, а какие — нечётными?

а) $y = \cos^3 x$; е) $y = 2 - \sin x$; л) $y = x\cos x$;

б) $y = \sin^2 x$; ж) $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; м) $y = x^2 + x\sin x$;

в) $y = x + \cos x$; з) $y = -2\sin 3x$; н) $y = x^2\cos x$;

г) $y = \cos 2x$; и) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; о) $y = \frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x}$;

д) $y = \operatorname{ctg} 3x$; к) $y = \frac{x}{\sin x}$; п) $y = \sin x^2$.

18. Найти наименьший положительный период функции.

а) $y = 3\sin 2x$; г) $y = -\sin\frac{1}{2}x$; ж) $y = \frac{1}{2}tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; к) $y = |\sin x|$;

б) $y = \frac{1}{2}\cos 4x$; д) $y = \cos\frac{x}{4}$; з) $y = tg\left(-\frac{x}{3}\right)$; л) $y = \sin 2x + \cos x$;

в) $y = \sin(-2x)$; е) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; и) $y = \sin\frac{x}{2} + tgx$; м) $y = tg\frac{x}{2} + 2\sin x$.

19. С помощью графиков функций сравнить значения функций.

а) $\sin 0{,}3\pi$ и $\sin 0{,}7\pi$; в) $tg(-2{,}6\pi)$ и $tg(-2{,}61\pi)$; д) $\sin 2$ и $\sin 3$;

б) $\cos 2{,}71$ и $\cos 2{,}73$; г) $\cos(-3{,}1)$ и $\cos(-4)$; е) $tg2$ и $tg1$.

20. При каких значениях x функция принимает наибольшее значение и чему оно равно?

а) $y = 3 + \cos x$; в) $y = 7 - tgx$; д) $y = \frac{1}{2}\sin x - 4$;

б) $y = 3 - \sin x$; г) $y = 5 - |\cos x|$; е) $y = 3 - |2\sin x|$.

21. Представить в виде произведения.

а) $\sin\frac{3}{4}\alpha - \sin\frac{2}{7}\alpha$; е) $\sin 2\alpha \sin 3\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 6\alpha$;

б) $\cos\frac{3}{8}\alpha - \cos\frac{7}{24}\alpha$; ж) $\sin\alpha + \sin\alpha + \sin(\alpha + \beta)$;

в) $\cos\frac{5}{6}\alpha + \cos\frac{4}{15}\alpha$; з) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$;

г) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha)$; и) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha - \cos 6\alpha$.

д) $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha \sin 3\alpha - \cos 4\alpha$;

22. Доказать тождество.

а) $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}ctg\alpha$; б) $\cos 2\alpha + tg^2\alpha\cos 2\alpha - 1 = -tg^2\alpha$;

в) $\frac{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + tg^2\alpha - 1} = ctg^2\alpha$.

23. Вычислить.

а) $\sin 43^\circ \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2$; б) $\cos^2 36^\circ - \cos^2 120^\circ - 0{,}5\sin 18^\circ - 0{,}5$;

в) $\frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \cos 65^\circ)}{\sin 20^\circ}$; г) $\frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}$;

д) $\frac{1 - 2\sin^2 46^\circ}{8\cos 92^\circ}$; е) $\frac{\left(\sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1}{\sin\frac{2\pi}{5}}$;

ж) $\dfrac{\sin^4\frac{\pi}{9}-\cos^4\frac{\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}}$; з) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{4}}{4\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}}$; и) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\sin x=\frac{1}{8}$;

к) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}$; л) $\sin x$, если $\sin(x+60°)+\sin(x-60°)=-1$;

м) $\sin 2\alpha$, если $tg\alpha=\frac{1}{2}$; н) $tg\alpha$, если $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$; о) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}2}$;

п) $\cos(2\alpha-\pi)$, если $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$; р) $2\cos 3\alpha\cos 4\alpha-\cos 7\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}8}$.

24. Упростить выражение.

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; б) $\dfrac{tg\alpha tg2\alpha}{tg2\alpha-tg\alpha}$; в) $\dfrac{(1-\sin^2\alpha)(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha)}{\cos\alpha+2\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$;

г) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)(\sin\alpha+\sin 5\alpha)$ вычислить при $\alpha=15°$;

д) $\dfrac{\sin 2\alpha\left(\cos^2\alpha+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ вычислить при $\alpha=\frac{\pi}{24}$;

е) $\dfrac{1}{tg3\alpha+tg\alpha}-\dfrac{1}{tg5\alpha-tg\alpha}$ вычислить при $\alpha=15°$.

25. Доказать тождество.

а) $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 2\alpha+\cos\alpha}=tg2\alpha$; б) $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)=4ctg\alpha$;

в) $\dfrac{\sin^3\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}=tg(\alpha-\beta)tg(\alpha+\beta)$;

д) $(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

е) $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630°)+\sin(2\alpha+810°)}{1-\cos(2\alpha-630°)+\sin(2\alpha+630°)}=ctg\alpha$;

26. Найти область определения функции.

а) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$; в) $y=\sqrt{\cos^2 x}$; д) $y=\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}$;

б) $y=\dfrac{7}{2\sin x-2}$; г) $y=\sqrt{1+\sin x}$; е) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x}$.

27. Найти период функции.

а) $y=\sin^2 2x$; б) $y=-2\sin\frac{5x}{4}$; в) $y=3tg\frac{x}{2}$; г) $y=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$.

28. Построить график функции.

а) $y=-0{,}5\sin 2x$; в) $y=2tg\frac{x}{3}-1$; д) $y=\frac{1}{2}ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $y=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; г) $y=-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $y=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Выразить в радианной мере величины углов.		
а) 60°; б) 135°.		а) 45°; б) 150°.
2. Определить значение выражения.		
$cos450° \cdot tg130°$.		$sin450° \cdot ctg110°$.
3. Найти значение $tg\alpha$, если известно, что:		
$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.		$sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Доказать тождество.		
$sin^4\alpha + 2sin^2\alpha cos^2\alpha + cos^4\alpha + sin^2\alpha + cos^2\alpha = 2$.		$16sin^4\alpha - (sin^2\alpha - 3cos^2\alpha)^2 = 24sin^2\alpha - 9$.
2. Определить знак выражения.		
а) $sin300°cos400°$; б) $sin(-1)cos(-2)$.		а) $sin\frac{4\pi}{5} \cdot tg\frac{\pi}{7}$; б) $sin3cos3$.
3. Дано: $sin\alpha = -\frac{4}{5}$ $180° < \alpha < 270°$. Найти: $cos\alpha$, $ctg\alpha$.		3. Дано: $cos\alpha = -\frac{24}{25}$ $90° < \alpha < 180°$. Найти: $sin\alpha$, $tg\alpha$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Доказать тождество.		
$1 + \frac{sin^4\alpha + sin^2\alpha cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$.		$\frac{cos^4\alpha + sin^2\alpha cos^2\alpha}{sin^2\alpha} + 1 = \frac{1}{sin^2\alpha}$.
2. Определить знак выражения.		
а) $\frac{cos200°tg400°}{sin300°}$; б) $cos2 \cdot tg4$.		а) $\frac{sin100°cos200°}{ctg300°}$; б) $sin4 \cdot ctg4$.
3. Дано: $tg\alpha = 3$ и α не лежит в III четверти. Найти: $sin\alpha$ и $ctg\alpha$.		3. Найти: $sin\alpha$ и $tg\alpha$, если известно, что $cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α не лежит во II четверти.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-2

В-I	7 баллов	В-II
1. Вычислить.		
а) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$; б) $ctg(-600°)$.		$\sin^2(180°-\alpha)+\sin^2(270°-\alpha)+ctg(90°+\alpha)\cdot ctg(360°-\alpha)$.
2. Упростить выражение.		
а) $\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; б) $(tg\alpha+ctg\alpha)\sin 2\alpha$.		а) $\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $(ctg\alpha-tg\alpha)tg2\alpha$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Вычислить.		
$tg(180°+\alpha)\cdot tg(90°+\alpha)+tg(90°-\alpha)ctg(270°-\alpha)$.		$\cos 55°\cos 10°+\sin 55°\sin 10°$.
2. Упростить выражение.		
а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$; б) $\sin(-x)+\cos(-x)tg(-x)$.		$\frac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$.
3. Доказать тождество.		
$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-tg^2\alpha}{tg\alpha}$.		$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{tg\alpha-1}{tg\alpha+1}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Вычислить.		
Дано: $tg\alpha=2$ Найти $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.		Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{3}$ Найти $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
2. Доказать тождество.		
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)+tg(\pi+\alpha)+$ $+ctg\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=2\cos\alpha$.		$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)+$ $+ctg\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=tg\alpha$.
3. Доказать равенство.		
$\sin 18°\sin 54°=\frac{1}{4}$.		$\sin 6°\cos 12°\cos 24°\cos 48°=\frac{1}{16}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-1-3

В-I	7 баллов	В-II
1. Найти область определения функции.		
$y = sin2x.$		$y = cos\frac{x}{2}.$
2. Найти область значения функции.		
$y = \frac{1}{3}cosx.$		$y = 5sinx.$
3. Найти наименьший положительный период.		
$y = 4tgx.$		$y = 3ctgx.$

В-III	9 баллов	В-IV
1. Найти область определения функции.		
$y = 2tgx.$		$y = \frac{1}{3}ctgx.$
2. Найти область значения функции.		
$y = 2cosx - 1.$		$y = tgx + 3.$
3. Найти наименьший положительный период.		
$y = tg4x.$		$y = 2cos\frac{x}{3}.$

В-V	12 баллов	В-VI
1. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{2sinx}.$		$y = \sqrt{-cosx}.$
2. Найти область значения функции.		
$y = 5\lvert cosx\rvert + 1.$		$y = 3\lvert sinx\rvert - 1.$
3. В каких точках функция принимает наименьшее и наибольшее значение и чему оно равно?		
$y = 1 - cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$		$y = 2 + sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-1-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Упростить выражение.		
$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.		$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.
2. Вычислить.		
$\sin 2\alpha$, если $tg\alpha=-\frac{5}{6}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.		$\cos 2\alpha$, если $tg\alpha=-\frac{5}{6}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
3. Представить в виде произведения.		
$\sin\alpha+\sin 9\alpha$.		$\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$.
4. Доказать тождество.		
$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin 2\alpha}=1$.		$\frac{\sin 4\alpha-1}{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2}=-1$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Упростить выражение.		
$\frac{1}{1-tg\alpha}-\frac{1}{1+tg\alpha}$.		$\frac{1}{1+ctg\alpha}-\frac{1}{1-ctg\alpha}$.
2. Вычислить.		
$\cos(\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.		$\sin(\alpha-\beta)$, если $tg\alpha=\frac{3}{4}$, $tg\beta=-\frac{4}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.
3. Представить в виде произведения.		
$\cos\alpha+\cos 13\alpha$.		$\cos 4\alpha+\cos 10\alpha$.
4. Доказать тождество.		
$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$.		$\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=-2$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Упростить выражение.		
$\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$.		$\cos\alpha\cos 3\alpha-\sin\alpha\sin 3\alpha$.
2. Найти $\cos(\alpha+\beta)$, если $ctg\alpha=-\frac{3}{4}; ctg\beta=\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$.		2. Найти $\frac{3\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$, если известно, что $tg\alpha=3$.
3. Представить в виде произведения.		
$\sin 38^\circ+\cos 24^\circ$.		$\cos 42^\circ-\sin 18^\circ$.
4. Доказать тождество.		
$\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}$.		$\frac{\sin 3\alpha+\cos 2\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha}=ctg2\alpha$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-1-2

В-I	7 баллов	В-II
1. Доказать чётность или нечётность функции.		
а) $y = \sin x$; б) $y = 4tgx$; в) $y = \cos 2x$.		а) $y = 2\cos x$; б) $y = ctg2x$; в) $y = \sin x + 1$.
2. Записать в порядке возрастания числа.		
$\sin 15°;\ \sin 90°;\ \sin(-15°)$.		$\cos 15°;\ \cos 90°;\ \cos 100°$.
3. Найти область определения функции.		
а) $y = \sin 3x$; б) $y = 2ctgx$.		а) $y = 3tgx$; б) $y = 1 - \cos x$.
4. Вычислить.		
а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; в) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ для функции $y = \cos 2x$.		а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f(\pi)$ для функции $y = \sin\frac{x}{2}$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Доказать чётность или нечётность функции.		
а) $y = tgx - 1$; б) $y = -\cos x$; в) $y = x - \sin x$.		а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = tgx - x$; в) $y = \lvert\cos x\rvert$.
2. Записать в порядке возрастания числа.		
$\sin 35°;\ \cos 110°;\ \sin 135°$.		$\sin 16°;\ \sin(-6°);\ \sin 56°$.
3. Найти область определения функции.		
а) $y = \frac{1}{\sin x}$; б) $y = ctgx - 2$.		а) $y = \sqrt{\cos x}$; б) $y = tgx + x$.
4. Схематически изобразить график функции и выполнить необходимые исследования.		
$y = -2\sin x + 1$.		$y = \frac{1}{3}\cos x - 1$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Доказать чётность или нечётность функции.		
а) $y = \frac{x^2}{\sin x}$; б) $y = 2x\sin 7x$; в) $y = x^2 - tg(x-3)$.		а) $y = \frac{\lvert\sin x\rvert}{x}$; б) $y = x^2\cos 7x$; в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1$.
2. Записать в порядке убывания числа.		
$\cos(-70°);\ \cos(-80°);\ \cos(-50°)$.		$\sin 105°;\ \sin 95°;\ \sin 115°$.
3. Найти область определения функции.		
а) $y = \frac{x}{\sqrt{-\cos x}}$; б) $y = tgx + ctgx$.		а) $y = \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}$; б) $y = \frac{tgx}{\sqrt{\cos x - 1}}$.
4. Схематически изобразить график функции и выполнить необходимые исследования.		
$y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.		$y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

1. Доказать тождество.

а) $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$.

$$sin3\alpha = sin(2\alpha+\alpha) = sin2\alpha cos\alpha + cos2\alpha sin\alpha =$$
$$= 2sin\alpha cos^2\alpha + (cos^2\alpha - sin^2\alpha)sin\alpha =$$
$$= 2sin(1-sin^2\alpha) + (1-2sin^2\alpha)sin\alpha =$$
$$= 2sin\alpha - 2sin^3\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha.$$

б) $sin3\alpha =$
$= 4sin\alpha sin(60^\circ-\alpha)sin(60^\circ+\alpha)$.

$$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha = 4sin\alpha\left(\frac{3}{4} - sin^2\alpha\right) =$$
$$= 4sin\alpha(sin^2 60^\circ - sin^2\alpha) =$$
$$= 4sin\alpha\frac{1-cos120^\circ - 1 + cos2\alpha}{2} =$$
$$= 2sin\alpha(cos2\alpha - cos120^\circ) =$$
$$= 4sin\alpha sin(60^\circ-\alpha)sin(60^\circ+\alpha).$$

2. Представить в виде произведения.

$1 + sin\alpha + cos\alpha$.

$$1 + sin\alpha + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2} + 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} =$$
$$= 2cos^2\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\alpha}{2} + sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2cos\frac{\alpha}{2}\left(sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) + sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= 4cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\pi}{4}cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = 2\sqrt{2}cos\frac{\alpha}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $1 + sin\alpha + cos\alpha = 2\sqrt{2}cos\frac{\alpha}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. Найти сумму: $S = cos\alpha + cos2\alpha + cos3\alpha + \ldots + cosn\alpha$.

Решение.

Аргументы слагаемых составляют арифметическую прогрессию с $d = 1$.

Домножим каждое слагаемое на $2sin\frac{d}{2}$, где d — разность прогрессии.

$$2Ssin\frac{\alpha}{2} = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\alpha + 2sin\frac{\alpha}{2}cos2\alpha + 2sin\frac{\alpha}{2}cos3\alpha + \ldots + 2sin\frac{\alpha}{2}cosn\alpha =$$
$$= sin\frac{3\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2} + sin\frac{5\alpha}{2} - sin\frac{3\alpha}{2} + sin\frac{7\alpha}{2} - sin\frac{5\alpha}{2} + \ldots$$
$$+\ldots sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - sin\frac{(2n-1)\alpha}{2} = -sin\frac{\alpha}{2} + sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} = 2sin\frac{n\alpha}{2}cos\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

Ответ: $S = \dfrac{sin\frac{n\alpha}{2}cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$.

4. Доказать тождество. $tg^2 10° + tg^2 50° + tg^2 70° = 9$.

$$tg^2 10° + tg^2 50° + tg^2 70° = \left(\frac{1}{\cos^2 10°} - 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 50°} - 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 70°} - 1\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 50° \cos^2 70° + \cos^2 10° \cos^2 70° + \cos^2 10° \cos^2 50°}{\cos^2 10° \cos^2 50° \cos^2 70°} - 3 =$$

$$= 4 \cdot \frac{(1 - \cos 80°)(1 - \cos 40°) + (1 - \cos 40°)(1 + \cos 20°) + (1 + \cos 20°)(1 - \cos 80°)}{(4 \cos 10° \cos(60° - 10°) \cos(60° + 10°))^2} - 3$$

После раскрытия скобок в числителе получим $\frac{9}{4}$. В знаменателе используем формулу косинуса тройного угла.

$(4 \cos 10° \cos(60° - 10°) \cos(60° + 10°))^2 = \cos^2 30° = \frac{3}{4}$.

Тогда $4 \cdot \frac{9}{4} : \frac{3}{4} - 3 = 9$.

Тождество доказано.

5. Вычислить. $ctg 70° + 4 \cos 70°$.

Решение.

$$ctg 70° + 4 \cos 70° = \frac{\cos 70° + 4 \cos 70° \sin 70°}{\sin 70°} = \frac{\sin 20° + 2 \sin 40°}{\sin 70°} =$$

$$= \frac{2 \cos 10° \sin 30° + \sin 40°}{\sin 70°} = \frac{\cos 10° + \sin 40°}{\sin 70°} = \frac{\sin 80° + \sin 40°}{\sin 70°} =$$

$$= \frac{2 \sin 60° \cos 20°}{\cos 20°} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Ответ:	$\sqrt{3}$.

6. Задача. Если $\sin\alpha = A \sin(\alpha + \beta)$, то доказать, что $tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$.

Доказательство.

Пусть $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$, тогда $\sin((\alpha + \beta) - \beta) = A \sin(\alpha + \beta)$ или

$\sin(\alpha + \beta)\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)\sin\beta = A \sin(\alpha + \beta)$.

Разделим обе части равенства на $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$,

получим: $tg(\alpha + \beta)\cos\beta - \sin\beta = A tg(\alpha + \beta)$; $tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$.

Тождество доказано.

7. Доказать тождество. $\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Доказательство.

$$\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 + \cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)} = ctg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = tg\left(\frac{\alpha}{2} + 45°\right).$$

Тождество доказано.

8. Вычислить без таблиц и калькулятора $sin18°$.

Решение.

Учтём, что $sin36° = cos54°$ и $36° = 2 \cdot 18°$, а $54° = 3 \cdot 18°$,

тогда $2sin18°cos18° = 4cos^3 18° - 3cos18°$,

$2sin18° = 4cos^2 18° - 3$,

$2sin18° = 4(1 - sin^2 18°) - 3$,

$2sin18° = 4 - 4sin^2 18° - 3$;

$4sin^2 18° + 2sin18° - 1 = 0$,

$sin18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ответ:	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Представить в виде произведения.

а) $sin^2\alpha - sin^2\beta$; б) $tg\alpha + ctg\beta$; в) $1 + 2sin\alpha$; г) $1 + \sqrt{2}cos\alpha$; д) $1 - tg\alpha$.

2. Упростить.

$sin\alpha + sin\beta cos(\alpha + \beta)$.

3. Вычислить.

а) $sin^3\alpha + cos^3\alpha$, если $sin\alpha + cos\alpha = 0{,}8$;

б) $tg\alpha$, если $2tg\alpha - sin\alpha + 5cos\alpha = 10$;

в) $sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}$, если $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Доказать тождество.

а) $cos2\alpha = tg\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)(1 - sin2\alpha)$; б) $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$.

5. Построить график функции.

а) $y = \frac{sin(|x| + x)}{cos|x|}$; б) $y = tg|x|cosx$;

в) $y = |tgx|cosx$; г) $y = tgxcos|x|$;

д) $|y| = y\sqrt{1 + tg^2 x}$; е) $|y| = y\sqrt{1 - sin^2 x}$;

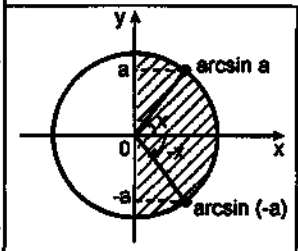
ж) $y = \frac{1 - 2sin^2 x}{sinxcosx}\sqrt{\frac{1}{cos^2 2x - 1}}$; з) $sin(\pi\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}) = 0$.

§2. Тригонометрические уравнения

Обратные тригонометрические функции

Определения	Примеры
Арксинусом числа a называется угол (число) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. $\boxed{arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\\ sin\varphi = a\end{array}}$ $\lvert a\rvert \le 1$.	$arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; $arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $arcsin 0 = 0$.
Арккосинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен a. $\boxed{arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\varphi \in [0;\pi]\\ cos\varphi = a\end{array}}$ $\lvert a\rvert \le 1$.	$arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $arccos(-1) = \pi$; $arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.
Арктангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. $\boxed{arctga = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ tg\varphi = a\end{array}}$.	$arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $arctg 1 = \frac{\pi}{4}$; $arctg 0 = \pi$.
Арккотангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен a. $\boxed{arcctga = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\varphi \in (0;\pi)\\ ctg\varphi = a\end{array}}$	$arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$; $arcctg(-1) = -\frac{3\pi}{4}$; $arcctg 0 = \frac{\pi}{2}$.

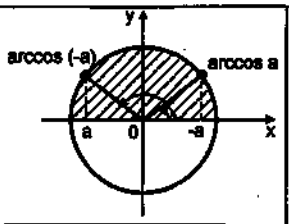
Простейшие свойства обратных тригонометрических функций



$\boxed{arcsin(-a) = -arcsin a}$

$\boxed{sin(arcsin a) = a}$

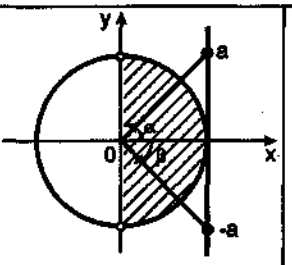
$\boxed{arcsin(sin\varphi) = \varphi,\ \text{если } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$



$\boxed{arccos(-a) = \pi - arccos a}$

$\boxed{cos(arccos a) = a}$

$\boxed{arccos(cos\varphi) = \varphi,\ \text{если } \varphi \in [0;\pi]}$



$\alpha = arctga$,

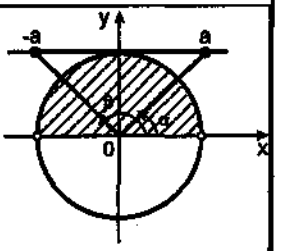
$\beta = arctg(-a)$,

$\beta = -\alpha$, то есть

$\boxed{arctg(-a) = -arctg\ a}$

$\boxed{tg(arctg\ a) = a}$

$\boxed{arctg(tg\alpha) = \alpha,\ \text{если } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$



$\alpha = arcctg\ a$,

$\beta = arcctg(-a)$,

$\beta = \pi - \alpha$, то есть

$\boxed{arcctg(-a) = \pi - arcctg\ a}$

$\boxed{ctg(arcctg\ a) = a}$

$\boxed{arcctg(ctg\ \alpha) = \alpha,\ \text{если } \alpha \in [0;\pi].}$

$arcsin a + arccos a = \frac{\pi}{2}$

$arctg\ a + arcctg\ a = \frac{\pi}{2}$

Тригонометрические уравнения

$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ Решений нет. $\lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z.$ $\boxed{\sin x = 0}$; $x = \pi k, \quad k \in Z.$ $\boxed{\sin x = 1}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$ $\boxed{\sin x = -1}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$	1) $\sin x = 3$ — решений нет. 2) $\sin 3x = 0,6$ $3x = (-1)^n \arcsin 0,6 + \pi n, \quad n \in Z;$ $x = (-1)^n \frac{1}{3} \arcsin 0,6 + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z.$ 3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \ \left(x + \frac{\pi}{6} = t\right),$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ Решений нет. $\lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z.$ $\boxed{\cos x = 0}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$ $\boxed{\cos x = 1}$; $x = 2\pi k, \quad k \in Z.$ $\boxed{\cos x = -1}$; $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$	1) $\cos x = -17$ — решений нет. 2) $1 + \cos\frac{x}{3} = 1, \ \cos\frac{x}{3} = 0,$ $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$ $x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n, \quad n \in Z.$ 3) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1;$ $x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, \quad n \in Z;$ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z.$
$\boxed{\operatorname{tg} x = a}$ $x = \operatorname{arctg}\ a + \pi k, \quad k \in Z$ $\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi k, \quad k \in Z.$	1) $\operatorname{tg} x = 3; \ x = \operatorname{arcctg} 3 + \pi n, \quad n \in Z$ 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 1; \ \frac{x}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad n \in Z$ $x = 4 \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z;$ $x = \pi + \pi n, \quad n \in Z.$
$\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$ $x = \operatorname{arcctg}\ a + \pi k, \quad k \in Z$ $\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$	1) $3\operatorname{ctg} 2x - 1 = 0;$ $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{3};$ $2x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in Z;$ $x = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in Z.$ 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7} = 0; \ \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $x = \frac{7\pi}{2} + 7\pi n, \quad n \in Z.$

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Решение тригонометрических уравнений

Уравнения, приводимые к квадратным

Уравнения вида: $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$; $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$; $a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$; $atgx + bctgx = 0$ и другие — не являются алгебраическими, но их можно привести к алгебраическим, введя новую переменную, относительно тригонометрической функции получится квадратное уравнение.

Решить уравнение.

1) $\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$,

пусть $\sin x = t$, тогда $\sin^2 x = t^2$

$t^2 - 4t - 5 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5, \\ t_2 = -1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 5 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

2) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$;

$4(1 - \sin^2 x) + 4\sin x - 1 = 0$;

$4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$,

пусть $\sin x = y$, тогда $\sin^2 x = y^2$

$4y^2 - 4y - 3 = 0$; $\frac{D}{4} = 16$; $\left[\begin{array}{l} y_1 = 1,5; \\ y_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1,5; \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

Решение уравнений вида

$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$; $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$; $a\ tg^2 x + b\ ctgx + c = 0$, $a \neq 0$.

Решить уравнение.	$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$;
Приведем уравнение к одной функции, используя одну из формул: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$; $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$.	$2 \cdot (1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0.$
Выполним тождественные преобразования, приведем к квадратному относительно одной из тригонометрических функций:	$2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$
Произведем замену:	$\cos x = t$; $\lvert t \rvert \le 1$,

Решим полученное квадратное уравнение относительно t:	$2t^2+t-1=0;\ D=9$ $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm3}{4}.$ $t_1=-1;\quad t_2=\frac{1}{2}.$
Вернемся к замене и решим уравнение:	$\cos x=-1;\quad x=\pi+2\pi n,\quad n\in Z;$ $\cos x=\frac{1}{2};\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$
Запишем ответ.	Ответ: $\pi+2\pi n,\quad n\in Z;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Однородные уравнения

Уравнения вида: $a\sin x+b\cos x=0;\quad a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0;$ $a\sin^3x+b\sin^3x\cos x+c\sin x\cos^2x+d\cos^3x=0$ называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней каждого слагаемого должна быть одинаковой. Эта сумма называется степенью однородного уравнения (k).

Решаются однородные уравнения делением на $\cos^k x$, где k — степень однородного уравнения.

1) $2\sin x-3\cos x=0$ (однородное 1й степени) $\cos x\neq0$, разделим на $\cos x$.

$2\operatorname{tg}x-3=0,$

$\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}.$

$x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

2) $\cos^2x-3\cos x\sin x+1=0,$

$\cos^2x-3\cos x\sin x+\cos^2x+\sin^2x=0,$

(однородное 1й степени)

$2\cos^2x-3\cos x\sin x+\sin^2x=0,$

$\cos^2x\neq0$, разделим на $\cos^2x$.

$2-3\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=0;$

$2-3\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x=0,$

пусть $\operatorname{tg}x=y$, тогда $y^2-3y+2=0.$

$\left[\begin{array}{l}y_1=1;\\y_2=2;\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1;\\\operatorname{tg}x=2;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\\x=\operatorname{arctg}2+\pi m.\end{array}\right.$

m и $n\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z;$

$\operatorname{arctg}2+\pi m,\quad m\in Z.$

Уравнения, решаемые разложением на множители

Одним из наиболее используемых методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители.
Для решения этим методом используют: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, формулы сокращённого умножения, а также различные тригонометрические формулы.

1) $\sin^2 x - \sin x = 0$

Вынесем общий множитель $\sin x$ за скобки:

$\sin x(\sin x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - 1 = 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \quad n \in Z\\ \sin x = 1\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \quad n \in Z\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in Z\end{array}\right.$

Ответ: $\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ n,\ m \in Z.$

2) $tg^3 x = tgx$

$tg^3 x - tgx = 0$

$tgx(tg^2 x - 1) = 0.$

Используем формулу разности квадратов:

$tgx(tgx - 1)(tgx + 1) = 0.$

$\left[\begin{array}{l}tgx = 0,\\ tgx = 1,\\ tgx = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \quad n \in Z\\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in Z\\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z\end{array}\right.$

Ответ: $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ n,\ k \in Z.$

Тригонометрические уравнения вида $\boxed{a\cos x + b\sin x = c}$

Такие уравнения можно решать введением вспомогательного угла.

Пусть $c \neq 0$ $a^2 + b^2 \neq 0$, тогда равносильное ему уравнение:

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$

то существует такой угол γ, для которого $\sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (1); $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2)

$\sin\gamma\cos x + \cos\gamma\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$

$\sin(x+\gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow x = -\gamma + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k,$

где γ выводится из формул (1) и (2).

Решить уравнение. $3\sin x + 4\cos x = 5.$

Решение.

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Разделим уравнения на 5: $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1.$

Пусть $\sin\gamma = \frac{4}{5};\ \cos\gamma = \frac{3}{5}$, тогда получим уравнение:

$\sin x\cos\gamma + \cos x\sin\gamma = 1;\ \sin(x+\gamma) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ x + \gamma = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$x = -\gamma + \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,$ если $\sin\gamma > 0,\ \cos\gamma > 0,$ тогда угол γ можно взять:

$\gamma = \arcsin\frac{4}{5}$ (или $\arccos\frac{3}{5}$).

Ответ: $-\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Примечание. Если $\sqrt{a^2+b^2} < c$, то уравнение не имеет решения.
Например: $2\sin x + 3\cos x = 4$, $\sqrt{4+9} < 4$, поэтому решения нет.

Решить уравнение.	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sqrt{2}.$
Решение.	
Найдём значение $\sqrt{a^2+b^2}$:	$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2.$
Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:	$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
Зная, что $\sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, найдём значение γ:	$\gamma = \arcsin\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{6}.$
Запишем данное уравнение в виде $\sin(x+\gamma) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$:	$\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\left(x+\frac{5}{12}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$
Решим полученное уравнение:	$x = \pm\frac{3}{4}\pi - \frac{5}{12}\pi + 2\pi n.$
Запишем ответ:	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$ $x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi m, \ n, \ m, \in Z.$

Решить уравнение.	$3\sin 5x - 2\cos 5x = 3.$
Удобно решать уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ с помощью формул: $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ Тогда данное уравнение приводится к квадратному относительно $tg\frac{x}{2}$. Необходимо помнить, что при решении таким способом могут быть потеряны корни вида $x = \pi + 2\pi k$, поэтому в данное уравнение необходимо подставить $x = \pi$, если получится верное равенство, тогда к ответу прибавим корни вида $x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$	$\frac{6tg\frac{5x}{2}}{1+tg^2\frac{5x}{2}} - \frac{2-2tg^2\frac{5x}{2}}{1+tg^2\frac{5x}{2}} - 3 = 0.$ $x \neq \frac{\pi}{5}(2n+1)$, тогда $tg^2\frac{5x}{2} - 6tg\frac{5x}{2} + 5 = 0,$ $\left[\begin{array}{l} tg\frac{5x}{2} = 1, \\ tg\frac{5x}{2} = 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in Z; \\ x = \frac{2}{5}arctg5 + \frac{2\pi m}{5}, \ m \in Z. \end{array}\right.$ Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \ n \in Z.$ $\frac{2}{5}arctg5 + \frac{2\pi m}{5}, \ m \in Z.$

Различные способы решения тригонометрического уравнения $\sin x - \cos x = 1$.

1-й способ. Приведение уравнения к однородному относительно синуса и косинуса.

$$\boxed{\sin x - \cos x = 1}$$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумента, а правую часть заменим тригонометрической единицей:

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$, $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$,

$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$, $\Rightarrow$ $\cos\frac{x}{2} = 0$, $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$;

$\cos\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \pi + 2\pi k$; $k \in Z$;

$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$ — однородное уравнение первой степени.

$\cos\frac{x}{2} \neq 0$, потому что если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то $\sin\frac{x}{2} = 0$, что противоречит тождеству

$\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$, поэтому делим обе части уравнения на $\cos\frac{x}{2}$.

Получим: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$;

Ответ: $x = \pi + 2\pi k$; $k \in Z$; или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

2-й способ. Разложение левой части уравнения на множители.

$$\boxed{\sin x - \cos x = 1}$$

$\sin x - (1 + \cos x) = 0$;

Так как $(1 + \cos x) = 2\cos^2\frac{x}{2}$, , а $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

то $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$; $\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$,

получили уравнение, которое рассматривали в первом случае.

3-й способ. Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение

$$\boxed{\sin x - \cos x = 1}$$

Запишем уравнение в виде $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$.

По формуле разности двух синусов получим

$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1$; $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а дальше — как в предыдущем случае.

4-й способ. Приведение к квадратному уравнению относительно одной из функций

$$\boxed{\sin x - \cos x = 1}$$

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$,

$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x = 1$, $\pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 + \cos x$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$;

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$;

$$cosx(cosx+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} cosx=0; \\ cosx+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi r,\ r\in Z \\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z. \end{cases}$$

Возведение в квадрат могло привести к появлению посторонних корней, поэтому необходима (обязательно) проверка. Выполним её. Полученные корни равносильны объединению трёх корней.

$$\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi r; \\ x_2=\pi+2\pi n; \\ x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi m. \end{cases}$$

x_1 и x_2 совпадают с полученными ранее, поэтому не являются посторонними.

Проверим: $x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z,$

$$sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)-cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)=sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-0=-1.\ -1\neq 1$$

Тогда $x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z$ — посторонний корень.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\quad x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

5-й способ. Возведение в квадрат обеих частей уравнения.

$$\boxed{sinx-cosx=1}$$

$(sinx-cosx)^2=1^2;\ sin^2x-2sinxcosx+cos^2x=1;\ 1-sin2x=1;\ sin2x=0;$

$2x=\pi k;\quad x=\frac{\pi}{2}k;\ k\in Z.$

Проверим, не получили ли посторонних корней.

$$x=\frac{\pi}{2}k \text{ даёт } \begin{cases} x_1=2\pi n, \\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x_3=\pi+2\pi m, \\ x_4=-\frac{\pi}{2}+2\pi l. \end{cases}$$

Проверка показывает, что x_1 и x_4 — посторонние корни.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\quad \pi+2\pi m,\ m\in Z.$

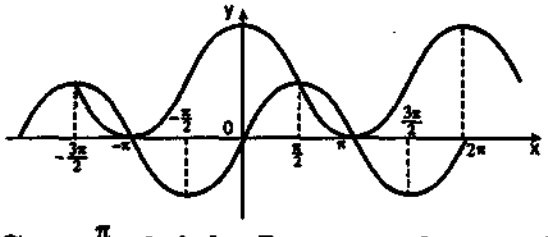
6-й способ. Графическое решение.

$$\boxed{sinx-cosx=1}$$

Запишем уравнение в виде $sinx=1+cosx.$

Построим графики функций $y_1=sinx;\quad y_2=1+cosx.$

Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения.



Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\quad x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

Решить уравнение.	$\cos x - \sin x = a$.
Решение.	
Заменим равносильным уравнением:	$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Исследуем вероятные случаи решения:	при $\left\|\frac{a}{\sqrt{2}}\right\| \le 1$, то есть $a \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi k,\ k \in Z$; при $a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$ — уравнение корней не имеет.
Ответ:	$-\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi k,\ k \in Z$, если $a \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; $\varnothing$, если $a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$.

Решение тригонометрических уравнений с использованием формул понижения степени

Часто тригонометрические уравнения решаются с помощью формул понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Решить уравнение.	$\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

Понизим степень: $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1$.

Домножим левую и правую части уравнения на 2: $1-\cos 2x + 1 - \cos 6x = 2$.

Выполним упрощение: $\cos 2x + \cos 6x = 0$.

Преобразуем левую часть в произведение: $2\cos 4x \cos 2x = 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0;\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}4x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z,\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z;\ \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z$.

Решить уравнение.	$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.
Понизим степень тригонометрических функций:	$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$.
Домножим левую и правую части на 2 и выполним упрощение:	$(\cos 2x + \cos 4x) + (\cos 6x + \cos 8x) = 0$.
Разложим левую часть уравнения на множители:	$2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0$, $\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0$, $2\cos x \cos 5x \cos 2x = 0$.
Решим полученное уравнение:	$\cos x = 0$, или $\cos 5x = 0$, или $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m$; $\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$.
Запишем ответ:	$\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} m$; $\ \frac{\pi}{4} + k$, $n, m, k \in Z$.

Решение дробно-рациональных уравнений относительно тригонометрических функций

Для решения уравнений такого типа используют условия равенства дроби нулю и условие равенства произведения выражений с переменными нулю.

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0; \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$ б) $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0; \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

Решить уравнение.

1) $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x}{1 + \cos x} = 0.$

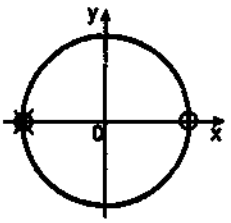
Решение.

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x = 0; \\ 1 + \cos x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x(2\sin x - 3) = 0; \\ \cos x \neq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \sin x = 1,5; \end{array}\right. \\ \cos x \neq -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0; \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, \ n \in Z \\ x \neq \pi + 2\pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$



На единичную окружность нанесём числа $x = \pi n, \ n \in Z$ и выберем те, которые удовлетворяют условию $\pi + 2\pi n, \ n \in Z$.

$x = 2\pi n, \ n \in Z.$

Ответ: $2\pi n, \ n \in Z.$

2) $\frac{\sin 2x + \sin 6x}{1 - \sin 2x} = 0.$

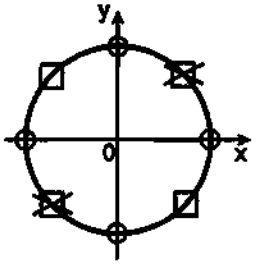
Решение.

$$\begin{cases} 2\sin 4x \cos 2x = 0; \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sin 2x \cos^2 2x = 0; \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0; \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right. \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, \ n \in Z \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \end{array}\right. \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z \end{array}\right. \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z \end{cases}$$



Ответ: $\frac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z.$

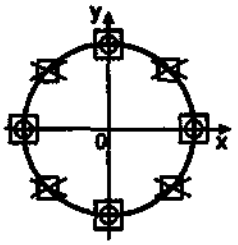
Эти серии решений можно объединить и записать так:

$x = \pi\frac{m}{4}; \ m \neq 1 + 4q, \ m,q \in Z.$

3) $tg2x \cdot sin4x = 0$

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} tg2x = 0; \\ sin4x = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z. \end{array}\right.$$



Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

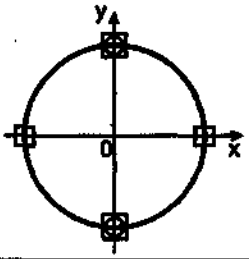
4) $sinxcos2x - sin3x = 0.$

$sinxcos2x - sin(x+2x) = 0,$

$sinxcos2x - sinxcos2x - cosxsin2x = 0,$

$cosxsin2x = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ sin2x = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ x_2 = \frac{\pi}{2} m,\ m \in Z \end{array}\right.$$



Ответ: $\frac{\pi}{2},\ m \in Z.$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить.

а) $arccos0$; б) $cos(arccos1)$; в) $arcsin\frac{1}{2}$; г) $4arccos0$;

д) $arccos\frac{1}{2}$; е) $cos\left(arccos\frac{1}{6}\right)$; ж) $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

з) $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; и) $arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; к) $arcsin1$; л) $arcsin(-1)$.

2. Имеет ли смысл выражение?

а) $arccos\sqrt{3}$; б) $arcsin(\sqrt{2}-1)^2$; в) $arccos(-3)$;

г) $arccos(-\pi)$; д) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $arccos\frac{a^2+4}{a^2+1}$;

ж) $arccos\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)$; з) $arcsin\frac{a^2+1}{a},\ a \neq 0.$

3. Найти область определения выражения.

а) $arcsin(2x-1)$; б) $arccos3x$; в) $arccos\frac{5-2x}{3}$; г) $arcsin\frac{6-\frac{x}{2}}{4}$;

д) $arcsin(cosx)$; е) $arccos(sin^2x)$; ж) $arcsin\frac{x-3}{x-5}$; з) $arccos\left(5-\frac{2}{x}\right)$.

4. Вычислить.

а) $sin\left(arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $arccos\left(cos\frac{\pi}{4}\right)$; в) $cos\left(arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $arcsin\left(sin\frac{\pi}{3}\right)$; д) $tg(arctg(-2))$; е) $ctg(arcctg\sqrt{3})$.

5. Привести к одной функции.

а) $\cos^2 x + \sin x$; б) $2\cos^2 x + 3\sin^2 x + \cos x - 2$; в) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3$;

г) $2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$; д) $\sin^2 x + 2\cos x$; е) $\cos 2x + 4\sin x$; ж) $tgx - 3ctgx$.

6. Найти область определения функции.

а) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; б) $y = \frac{1}{\cos x + 2}$; в) $y = tgx$;

г) $y = ctgx$; д) $y = \frac{1}{\sin^2 x + 1}$; е) $y = \frac{1}{tg^2 x + 1}$.

7. Решить уравнение.

а) $\cos x = \frac{1}{2}$; б) $\cos x - 1 = 0$; в) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;

г) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = -1$; е) $\cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x = 4$;

ж) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; и) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

к) $2\sin x\cos x = 9$; л) $\sin x + \frac{1}{3} = 0$; м) $\sin x\cos 6x - \cos x\sin 6x = -1$.

8. Найти корни уравнения.

а) $2\sin 6x\cos 6x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + 1 = \cos\frac{\pi}{2}$; в) $\sqrt{3}tg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3$;

г) $tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$; д) $\cos^2\frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \sin^2\frac{x}{4}$; е) $4\sin x\cos x\cos 2x = 1$;

ж) $\sin x\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; з) $3tgx + \sqrt{3} = 0$; и) $ctg\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$;

к) $ctg\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x + \cos^2 x$; л) $tg3x \cdot (\sqrt{2} - \sin x) = 0$; м) $tgx(\sin x + 1) = 0$.

9. Решить уравнение.

а) $\cos^2 x - 11\cos x + 10 = 0$; б) $tg^2 x + 2tgx - 3 = 0$; в) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$;

г) $tgx + 2ctgx = 3$; д) $\cos 2x + \sin x = 0$; е) $8\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0$;

ж) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; з) $2\cos 2x + 3\sin 2x = 0$; и) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$;

к) $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$; л) $2\sin x + \cos x = 2$; м) $\cos x(\sin x - 3) = 0$.

10. Решить уравнение.

а) $\cos x(2\sin x+1)=0$; б) $(\sin x+1)\sin x=0$; в) $(tg^2x+1)\sin x=0$;

г) $(tg^2x+1)\cos x=0$; д) $\cos x(2\sin x+1)=0$; е) $\cos x\cdot\sin x=0$;

ж) $\sin^2x+\sin x=0$; з) $\sin 7x-\sin x=0$; и) $7\cos x-4\sin 2x=0$;

к) $1+\cos x=\sin x$; л) $2\cos^2x-\cos x=0$; м) $tgx=tg4x$.

11. Решить уравнение разными способами.

а) $1+\cos x+\cos 2x=0$; б) $\sin 2x+\cos 2x=1$; в) $\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x=0$;

г) $22\cos^2x+4\sin 2x=7$; д) $\cos^4x-\sin^4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos 4x+\sin 2x=0$;

ж) $\cos x(tgx-1)=0$; з) $\cos 5x-\cos 3x=0$; и) $\sin^4x+\cos^4x=\frac{7}{8}$;

к) $\sqrt{3}\sin 3x=\cos 3x+1$; л) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}$; м) $\sin^2x+\cos^2x=1$;

н) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{2}$; о) $\cos^2x+\cos^22x=1$; п) $\sin^2x+\cos^24x=1$;

р) $\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x=1,5$; с) $\sin^4x+\cos^4x=\frac{7}{8}$.

12. Решить уравнение.

а) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$; б) $\sin x+\cos x=1{,}25$; в) $4\sin x+3\cos x=2$;

г) $\sqrt{3}\sin x=\cos 3x+1$; д) $3\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}=3$.

13. Решить уравнение разными способами.

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

14. Решить дробно-рациональное уравнение.

а) $\frac{\sin(x-45^\circ)}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$; б) $\frac{\cos x-0{,}5}{\cos(x+30^\circ)}=0$; в) $\frac{\sin 5x-\sin x}{\cos x}=0$;

г) $\frac{\sin 6x}{\sin 4x}=1$, если $170^\circ<x<200^\circ$; д) $\frac{\cos 7x}{\sin 2x}=1$, если $70^\circ<x<150^\circ$.

15. Решить уравнение.

а) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$; б) $\cos 3x\cos 6x=\cos x\cos 4x$;

в) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$; г) $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-1

В-I	7 баллов	В-II
Вычислить.		
а) $arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $arccos 0$.		а) $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $arcsin 1$.
Решить уравнение.		
а) $2sinx-1=0$; б) $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; в) $2cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-\sqrt{3}$.		а) $2cos\frac{x}{2}+1=0$; б) $ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$; в) $2sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)+\sqrt{2}=0$.

В-III	9 баллов	В-IV
Решить уравнение.		
а) $sin\left(-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}$; б) $1-2sin^2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $cos\frac{5}{6}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $tg(1-x)=-2$.		а) $cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $sinxcosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $cos(2-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $tg2x=ctg\frac{\pi}{3}$.

В-V	12 баллов	В-VI
Решить уравнение.		
а) $2sin\left(6x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; б) $sin3xcos3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{2}+sin^2\frac{x}{4}$; г) $cos\pi x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $tg\frac{\pi}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.		а) $\sqrt{3}cos\left(\frac{x}{6}-\frac{3}{2}\pi\right)=2$; б) $cos\frac{x}{5}sin\frac{x}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2sin^23x-\frac{1}{2}=1$; г) $cos(1-2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $tg\frac{\pi}{x^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-2-2

В-I	7 баллов	В-II
Решить уравнение.		
а) $3sin^2x-7cosx=3$; б) $sinx-cosx=0$; в) $sin^2x-sin2x=3cos^2x$.		а) $2cos^2x+3sinx=0$; б) $sinx+cosx=0$; в) $2sin^2x-\frac{1}{2}sin2x=cos^2x$.

В-III	9 баллов	В-IV
а) $cos^2x+5sinx-7=0$; б) $\sqrt{3}sinx+cosx=0$; в) $1-cosx-\sqrt{3}sin\frac{x}{2}=0$.		а) $4sin^2x+cosx-3\frac{1}{2}=0$; б) $2cos2x+3sin2x=0$; в) $1+cosx+\sqrt{3}cos\frac{x}{2}=0$.

В-V	12 баллов	В-VI
а) $3sin^22x+7cos2x-3=0$; б) $3sin^2x+sinxcosx=2cos^2x$; в) $sin^2\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}$; г) $sinx+sin3x=4cos^3x$.		а) $2cos^2x+2\sqrt{2}sinx-3=0$; б) $3cos^2x-5sin^2x-2sinxcosx=0$; в) $cos^2\frac{3}{2}x=\frac{1}{4}$; г) $tgx+tg2x-tg3x=0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-2-1
Тема. Решение тригонометрических уравнений.

Решить уравнение.

В-I	7 баллов	В-II
а) $2\cos x+\sin x=0$; б) $tg^2x-tgx=0$; в) $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; г) $\sin^2x-5\sin x\cos x+4\cos^2x=0$; д) $1-\cos 4x=\sin 2x$.		а) $3\sin x+\cos x=0$; б) $ctg^2x+ctgx=0$; в) $ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$; г) $4\sin^2x+5\sin x\cos x+\cos^2x=0$; д) $1+\cos 6x=\cos 3x$.

В-III	9 баллов	В-IV
а) $5-4\sin^2x=5\cos^2x$; б) $\sin(x-30°)\cos 2x=\sin(x-30°)$; в) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$; г) $\sin x+\sin 5x=2\cos 2x$; д) $tgx\sin(2x+30°)=tg(x+180°)$.		а) $5-4\cos^2x=5\sin^2x$; б) $2\cos(x+60°)\cos 3x==\cos(x+60°)$; в) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$; г) $\cos 5x+\cos x=-2\cos 3x$; д) $tg(2x-60°)\cos\frac{x}{2}=0$.

В-V	12 баллов	В-VI
а) $\sqrt{2}\cos 2x\sin(5x+90°)=\cos 2x$; б) $\sin 2x=\sin 3x$; в) $\cos 3x=\sin 2x$ на промежутке $75°<x<150°$; г) $8\cos^4x=11\cos 2x-1$; д) $\sin^2x-(\sqrt{3}+1)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2x=0$; е) $2tgx\cos x+1=2\cos x+tgx$.		а) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}=2\cos\left(\frac{x}{3}+270°\right)\sin 3x$; б) $\sin 4x=-\sin 3x$; в) $\sin 2x+\cos 3x=0$ на промежутке $0<x<90°$; г) $8\sin^4x+13\cos 2x=7$; д) $\sqrt{3}\sin^2x+5\cos^2x-(5\sqrt{3}+1)\sin x\cos x=0$; е) $tg2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

Уравнения вида
$a(\sin x \pm \cos x) \pm b\sin x\cos x = c$
решаются с помощью замены
$t = \sin x \pm \cos x$, так как

$$|\sin x \pm \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2},$$

то $|t| \le \sqrt{2}$; тогда $\sin x\cos x = \pm\frac{t^2-1}{2}$, и получим квадратное уравнение относительно переменной t.
Необходимо помнить, что возможно появление посторонних корней, поэтому необходимо сделать проверку полученных корней.

Решить уравнение:
$\sin 2x + 12(\sin x + \cos x) - 12 = 0$.

Решение.

Замена: $\sin x + \cos x = t$.

$(\sin x + \cos x)^2 = t^2$

$1 + 2\sin 2x = t^2$

$\sin 2x = \frac{t^2-1}{2}$

После подстановки получим уравнение:

$t^2 + 12t - 13 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -13; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1, \\ \sin x + \cos x = -13; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\quad x = 2\pi m,\ n,m \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;\ 2\pi m,\ m \in Z$.

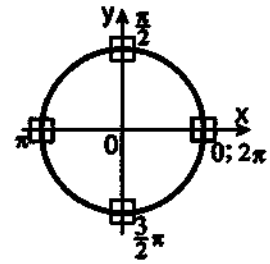
1. Решить уравнение.

$\sin(\pi\cos x) = 0$

$\pi\cos x = \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = n$.

$$|n| \le 1 \quad \Rightarrow \quad n = \pm 1; 0 \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -1, \\ \cos x = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$



Ответ: $\frac{\pi}{2}m,\ m \in Z$.

2. Решить уравнение.

$\operatorname{ctg}(\sin x) = \sqrt{3}$.

$\sin x = \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$\sin x \in [-1;1] \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{\pi}{6}$,

$x = (-1)^m \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi m,\ m \in Z$.

Ответ: $(-1)^m \arcsin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi m,\ m \in Z$.

Нестандартные приёмы решения тригонометрических уравнений

Для овладения нестандартными приёмами и методами решения тригонометрических уравнений необходим следующий теоретический материал.

Теорема 1. Если на некотором множестве чисел верны неравенства $f(x) \le a$, $g(x) \le b$, то на множестве M уравнение $f(x) + g(x) = a + b$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a; \\ g(x) = b. \end{cases}$$

Теорема 2. На любом множестве действительных чисел уравнение $f^2(x) + \varphi^2(x) = 0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = 0; \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 3. Если на некотором множестве действительных чисел верны неравенства $f(x) \ge a$; $\varphi(x) \le a$, то на множестве M уравнение $f(x) = \varphi(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a; \\ \varphi(x) = a. \end{cases}$$

Теорема 4. Если $|f(x)| \ge a$; $|\varphi(x)| \le b$, то уравнение $f(x) \cdot \varphi(x) = ab$ равносильно совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = a; \\ \varphi(x) = b. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -a; \\ \varphi(x) = -b. \end{cases} \end{array}\right.$$

1. Решить уравнение.	$\sin x \cdot \sin 5x = 1$.

Решение.

Так как $|\sin x| \le 1$, $|\sin 5x| \le 1$, то (теорема 4):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1; \\ \sin 5x = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1; \\ \sin 5x = -1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ:	$\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

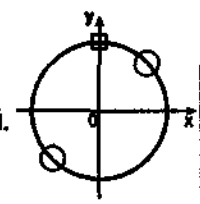
2. Решить уравнение.	$\sin x + \sin 2x = 2$.

Решение.

$|\sin x| \le 1$, $|\sin 2x| \le 1$ $\quad 2 = 1 + 1$ (теорема 4);

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}$$

следовательно, система не имеет решений.



Ответ:	уравнение не имеет решений.

3. Решить уравнение.	$\sin x + \sin 9x = 2.$

Решение.

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \ \text{(а)}; \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9},\ n \in Z \ \text{(б)}. \end{cases}$$

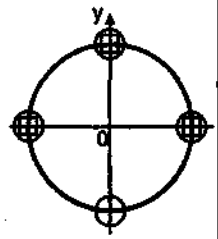
Корни (а) изображаются одной точкой единичной окружности, корни (б) — девятью точками. Значит, если система совместима, то её корнями могут быть лишь корни (а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. Проверим это: $\sin 9x = \sin\left(\frac{9\pi}{2} + 18\pi k\right) = \sin\frac{9\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Ответ:	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

4. Решить уравнение.	$\sin^{2001} x + \cos^{2000} x = 1.$

Решение.

Так как $|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1\ \sin^{2001} x \le \sin^2 x,\ \cos^{2000} x \le \cos^2 x$



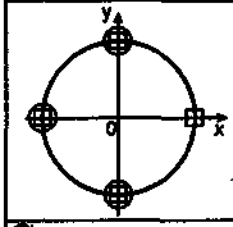
$$\sin^{2001} x + \cos^{2000} x = \sin^2 x + \cos^2 x \begin{cases} \sin^{2001} x = \sin^2 x; \begin{cases} \sin x = 0;\ 1 \\ \cos x = 0;\ \pm 1 \end{cases} \\ \cos^{2000} x = \cos^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi n \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ или } x = 2\pi n \text{ или } \pi + 2\pi n \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \pi n,\ n \in Z; \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \end{matrix}$$

Ответ:	$\pi n;\ \ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

5. Решить уравнение.	$\sin^8 x - \cos^5 x = 1.$

Решение.



$$\begin{cases} \sin^8 x = \sin^2 x \\ -\cos^5 x = \cos^2 x \end{cases} \begin{cases} \sin x = 0;\ \ \pm 1, \\ \cos x = 0;\ -1. \end{cases}$$

Ответ:	$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

6. Решить уравнение.	$\sin^{11} 3x - \cos^{1999} 5x = 2.$

Решение.

$|\sin x| \le 1;\ |\sin^{11} 3x| \le 1;\ |\cos x| \le 1;\ |\cos^{1999} 5x| \le 1;$

$\sin^{11} 3x - \cos^{1999} 5x = 2;\ \sin^{11} 3x = 1;\ \cos^{1999} 5x = -1 \ \Rightarrow \ 1 - (-1) = 2;$

$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n;\ 5x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{\pi^5}{6} + \frac{2^{10}}{3}\pi n = \frac{\pi^6}{5} + \frac{5^5}{2}\pi n;\ 5\pi + 20\pi n = 6\pi + 65\pi n;$

$45\pi n = -\pi;\ 45n = -1;\ n = -\frac{1}{45};\ \varnothing$, так как $n \in Z.$

Ответ:	$\varnothing.$

Использование области определения функции при решении уравнений

Теорема. Пусть $f(x) = g(x)$. $D(f)$, $D(g)$ — области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Рассмотрим общую часть этих множеств. ОДЗ уравнения. Если ОДЗ — пустое множество, то уравнение не имеет корней. Если ОДЗ — конечное множество, то корни уравнения можно найти подбором.

Например: $sin\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{-x}}{2}\right)^2 = sin\frac{x}{2}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ -x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 0. \end{cases} x = 0$

Проверка: $sin0 = sin0$, $x = 0$ — корень уравнения.

Ответ:	0.

Использование области значений функции при решении тригонометрических уравнений

1. Решить уравнение.	$2cosx = 3 - cos2x$.

Решение.

$E(2cosx) = [-2;2]$; $E(3 - cos2x) = [+2;4]$, значит, решениями уравнения могут быть только такие числа x, для которых одновременно левая и правая части равны 2.

$$\begin{cases} 2cosx = 2; \\ 3 - cos2x = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cosx = 1, \\ cos2x = 1; \end{cases} \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ:	$2\pi n,\ n \in Z$.

2. Решить уравнение.	$2cosx = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$.

$2cosx = f(x) \Rightarrow \sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = \varphi(x)$

Область значений $f(x)$ и $\varphi(x)$: $2cosx \in [-2;2]$. ОДЗ функции $\varphi(x)$: $x \in [3;+\infty]$

$\varphi(3) = \sqrt{6}$, $\varphi(x)$ — возрастает, тогда $\varphi(x) \in [\sqrt{6};+\infty]$.

Но значения функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не пересекаются: $[-2;2] \cap [\sqrt{6};+\infty]$.

Ответ:	$\varnothing$.

Графическое решений уравнений

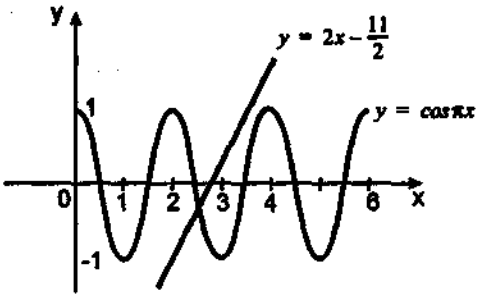
Если графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ легко построить, то уравнение $f(x) = g(x)$ можно решить графически. Абсциссы точек пересечения графиков функций будут корнями уравнения.

1. Решить графически уравнение.	$\frac{11}{2} + \cos\pi x = \lvert x-3\rvert + \lvert x+3\rvert.$

Решение.

Обе части данного уравнения являются чётными функциями, а поэтому, если x_0 является корнем этого уравнения, то и число $-x_0$ будет его корнем. Значит, чтобы найти все его корни, достаточно найти неотрицательные решения уравнения.

Для $x \ge 0$ $\frac{11}{2} + \cos\pi x = \lvert x-3\rvert + x + 3.$



1) $0 \le x \le 3$, $\frac{11}{2} + \cos\pi x = 6;$

$\cos\pi x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm\frac{1}{3} + 2n, \ n \in Z.$

Учитывая, что $0 \le x \le 3$, $x = \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}.$

2) $x > 3; \quad \cos\pi x = 2x - \frac{11}{2}.$

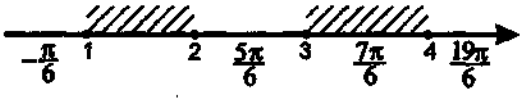
Графически легко установить, что уравнение не имеет корней.

Ответ:	$-\frac{7}{3}; \ -\frac{5}{3}; \ -\frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{5}{3}; \ \frac{7}{3}.$

2. Решить уравнение.	$2\sin\frac{\pi}{2}x = x + \frac{1}{x}$

Решение.

$\left|2\sin\frac{\pi}{2}x\right| \le 2; \quad \left|x + \frac{1}{x}\right| \ge 2;$



$$\begin{cases} \left|2\sin\frac{\pi}{2}x\right| = 2; \\ \left|x + \frac{1}{x}\right| = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| = 1. \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что числа $x = 1$ или $x = -1$ удовлетворяют и первому уравнению системы.

Ответ:	$\pm 1.$

3. Решить уравнение.	$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ при $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} < 0.$

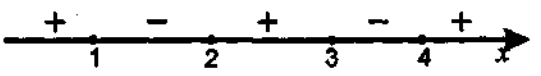
Решение.

Найдём промежутки, к которым относится x.

$\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} < 0$ ОДЗ: $x \neq 3;\ x \neq 4.$

$(x^2-3x+2)(x^2-7x+12) < 0;$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0;$



$x \in (1;2) \cup (3;4)$, или

$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2; \\ 3 < x < 4. \end{array}\right.$

$2\cos^2 x + 3\sin x = 0,\ 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0,\ \sin x = y,$

$2y^2 - 3y - 2 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 2, \\ y_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 2, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$

Используем условие $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2; \\ 2 < x < 3. \end{array}\right.$

уччтем $x \in (1;2) \cup (3;4)$ получим $x = \frac{7}{6}\pi.$

Ответ:	$\frac{7}{6}\pi.$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

Решить уравнение.

1. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 100x = 100.$
2. $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3.$
3. $(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \cdot \sin 4x = 2.$
4. $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (4 - 2\cos x) = 1 + 5\cos 3x.$
5. $\cos 3x + \cos^6 x = 2.$
6. $\sin^2 2x + 1 = \cos^4 3x.$
7. $\cos x \cdot \cos 10x = 1.$
8. $\sin^5 x + \cos^6 x = 1.$
9. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = tgx + ctgx.$
10. $\sin x \sin 5x \sin 9x = 1.$
11. $3 - 2\cos^4 6x = \sin^4 x.$
12. $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8y + 21.$
13. $\cos x + \cos 3x = 2.$
14. $\sin 2x + \sin 7x = -2.$
15. $\cos x = \sqrt{x} + 6.$
16. $\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\cos x\right) = \frac{1}{4}.$
17. $\cos^{31} x - \sin^{203} x = 1.$
18. $\sin^{36} x + \cos^{36} x = 1.$
19. $\sin 5x + \cos 2x = 2.$

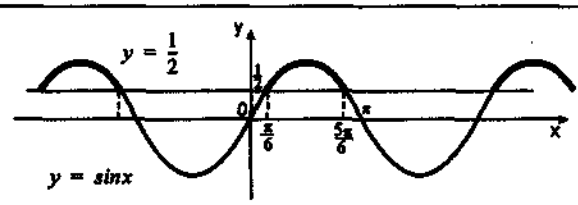
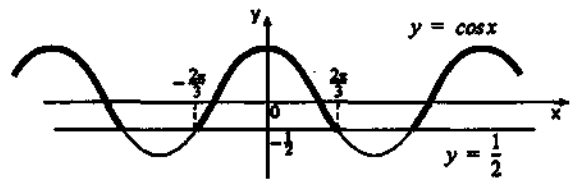
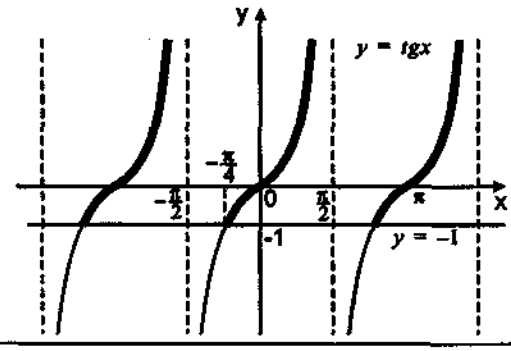
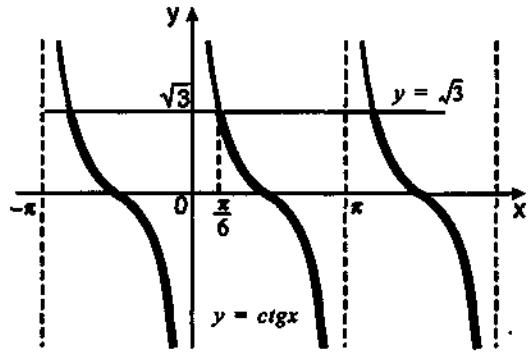
§ 3. Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства — это неравенства вида:

$$\sin x \gtrless a,\ \cos x \gtrless a,\ tgx \gtrless a,\ ctgx \gtrless a.$$

Для решения простейших тригонометрических неравенств можно пользоваться графиками соответствующих тригонометрических функций.

Решить неравенство.

$\sin x > \frac{1}{2}$.	
Ответ:	$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5}{6}\pi+2\pi n\right), n \in Z.$
$\cos x > -\frac{1}{2}$.	
Ответ:	$\left(-\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\frac{2}{3}\pi+2\pi n\right), n \in Z.$
$tgx > -1$.	
Ответ:	$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z.$
$ctgx < \sqrt{3}$.	
Ответ:	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\pi+\pi n\right), n \in Z.$

Для решения тригонометрических неравенств очень удобно пользоваться единичной окружностью, на которой множество решений изображается в виде одной или нескольких дуг окружности.

Напомним: ось синусов совпадает с осью Oy, ось косинусов — с осью Ox, ось тангенсов — это прямая $x = 1$, а ось котангенсов — это прямая $y = 1$.

Решениями неравенств вида $sinx > a$, $cosx > a$ является множество всех действительных чисел, если $a \le -1$.

Решениями неравенств $sinx < a$ и $cosx < a$ является множество всех действительных чисел, если $a \ge 1$.

$sinx > -1,2$. Ответ: $x \in R$.

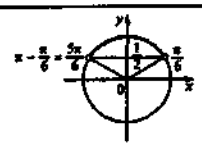
$cosx < 7,5$. Ответ: $x \in R$.

$sinx > 1,2$. Ответ: $\varnothing$.

$cosx < -3$. Ответ: $\varnothing$.

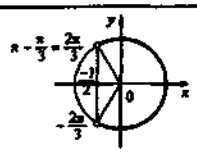
Решить неравенство.

$sinx > \frac{1}{2}$.



Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$cosx > -\frac{1}{2}$.



Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi k}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Решение простейших неравенств вида $tgx \gtrless a$, $ctgx \gtrless a$.

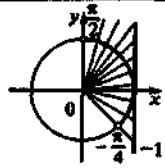
1. Функция $y = tgx$ определена при $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Функция $y = ctgx$ определена при $x \ne \pi n, n \in Z$.

Период этих функций равен π.

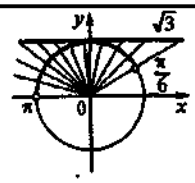
2. Так как областью значений функций $y = tgx$ и $ctgx$ является множество всех действительных чисел, то неравенства $tgx \gtrless a$ и $ctgx \gtrless a$ всегда имеют решения.

$tgx > -1$



Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

$ctgx < \sqrt{3}$



Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z.$

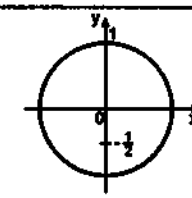
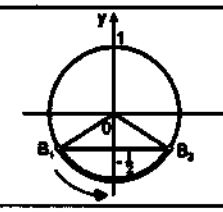
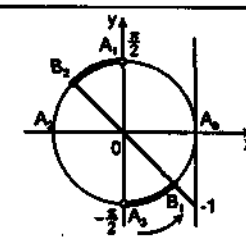
УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Решение простейших тригонометрических неравенств $cosx \gtrless a$; $sinx \gtrless a$.

При решении неравенств вида $sinx \gtrless a$, $cosx \gtrless a$ с помощью тригонометрической окружности необходимо помнить:

1) записывая промежуток, который является решением неравенства, следят, чтобы слева было меньшее число, а справа — большее, что соответствует на окружности движению против часовой стрелки;
2) ответ записывают с учётом периода.

При решении простейших тригонометрических неравенств можно пользоваться алгоритмом.

Решить неравенство.	$sinx < -\frac{1}{2}$
Проверим, имеет ли решение данное неравенство.	Так как $-\frac{1}{2} > -1$, то решения есть.
Нарисуем единичную окружность и на соответствующей оси отложим отрезок, равный a.	$a = -\frac{1}{2}$ 
Через полученную точку на оси проведём прямую, параллельную другой оси, и отметим точки её пересечения с единичной окружностью.	
Запишем соответствующую дугу.	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z$ или $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.
Ответ:	$\left(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.
Решить неравенство.	$tgx \le -1$
Начертим единичную окружность и соответствующую ось, на которой отметим отрезок, равный a.	$a = -1$ 
Через полученную точку на оси и начало координат проведём прямую и обозначим точки её пересечения с единичной окружностью.	
Запишем дугу соответственно данному неравенству.	Так как $tgx \le -1$, то нужно записать дугу $\cup A_3B_1$ или дугу $\cup A_1B_2$, которые отличаются на период π. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ или $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{3}{4}\pi + \pi n,\ n \in Z$.
Ответ:	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in Z$.

Неравенства вида $\boxed{sin(ax+b)>c;\ cos(ax+b)<c}$

Решить неравенство: $2sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)\le tg\frac{\pi}{3}$.

Обозначим выражение $ax+b$ через t и решим полученное неравенство.

Решение.

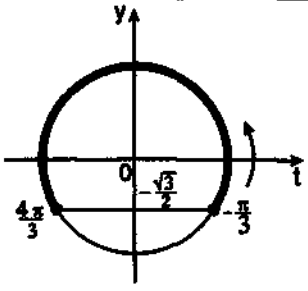
$tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};\ \ -2sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\le\sqrt{3}$ (применили нечётность функции);

$sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Заменим $3x-\frac{\pi}{6}=t$. Решим неравенство $sint\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Проведем прямую $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, отметим точки пересечения с окружностью и дугу, соответствующую решению неравенства.

Неравенству $sint\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяют все значения t двойного неравенства:



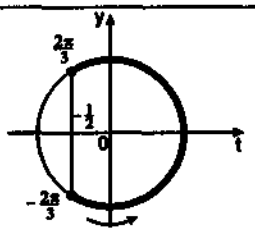
$-\frac{\pi}{3}+2\pi n\le t\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$ тогда

$-\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 3x-\frac{\pi}{6}\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$

$-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 3x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

$-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z.$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\right],\ n\in Z$.

Решить неравенство.	$cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\ge-\frac{1}{2}$.
Замена $ax+b=t$:	$2x-\frac{\pi}{6}=t$.
Проведём прямую $t=c$:	$t=-\frac{1}{2}$.
Отметим точки пересечения прямой с единичной окружностью и соответствующую дугу:	
Запишем соответствующие значения t в виде неравенства с учётом периода:	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le t\le\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Вернёмся к замене и решим полученное неравенство:	$-\frac{2}{3}\pi+2\pi n\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{2}{3}\pi+2\pi n;$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2x\le\frac{5}{6}\pi+2\pi n;$ $-\frac{\pi}{4}+\pi n\le x\le\frac{5}{12}\pi+\pi n;\ n\in Z.$
Ответ:	$-\frac{\pi}{4}+\pi n\le x\le\frac{5}{12}\pi+\pi n,\ n\in Z.$

Тригонометрические неравенства, приводимые к квадратным

Если тригонометрическое неравенство в результате тождественных преобразований приводится к виду:

$a\sin^2 t+b\sin t+c>0$ или $(a\cos^2 t+b\cos t+c>0)$

$a\sin^2 t+b\sin t+c<0$ $(a\cos^2 t+b\cos t+c<0)$,

то вводят подстановку: $y=\sin t, (y=\cos t)$, причём $|y|\le 1$.

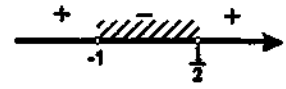
Получают неравенство вида: $ay^2+by+c>0$ или $ay^2+by+c<0$.

Решив алгебраическое неравенство, возвращаются к подстановке. Решают простейшее тригонометрическое неравенство, полученное в результате подстановки.

Решить неравенство $2\sin^2 x+\sin x-1<0$.

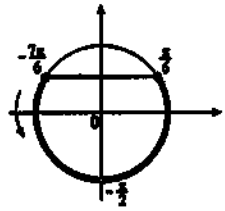
Решение.

Пусть $\sin x=y$, тогда $2y^2+y-1<0$, решаем это неравенство:

$2y^2+y-1=0;\ y_1=-1;\ y_2=\frac{1}{2};$ 

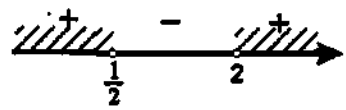
$-1<y<\frac{1}{2}.$

Неравенство сводится к решению системы:

$\begin{cases}\sin x>-1\\ \sin x<\frac{1}{2}\end{cases}$ 

$\begin{cases}x\ne\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,\\ -\frac{7}{6}\pi+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{-7}{6}\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

Решить неравенство.	$\cos 2x+5\sin x-3<0.$
Выполним тождественные преобразования, приведём к одной функции:	$-2\sin^2 x-5\sin x-2<0.$
Введём подстановку:	$y=\sin x.$
Решим алгебраическое неравенство:	$-2y^2+5y-2<0.$ $2y^2-5y+2>0,$  $\left[\begin{array}{l}y>2,\\ y<\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Вернёмся к подстановке, решим совокупность или систему простейших тригонометрических неравенств.	$\left[\begin{array}{l} sinx>2, \\ sinx<\frac{1}{2}. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ -\frac{7}{6}\pi+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$
Ответ: $x\in\left(-\frac{7}{6}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z.$	

Решение тригонометрических неравенств другими методами

1. Решить неравенство.	$\lvert sinx\rvert>\lvert cosx\rvert$.

Решение.

Так как $sinx\geq 0$ и $\lvert cosx\rvert\geq 0$, то возведём обе части неравенства $\lvert sinx\rvert>\lvert cosx\rvert$ в квадрат, при этом получим неравенство, равносильное данному.

$\lvert sinx\rvert^2>\lvert cosx\rvert^2$; $(sinx)^2>(cosx)^2$;

$sin^2x-cos^2x>0$; $cos^2x-sin^2x<0$; $cos2x<0$ (II и III четверти единичной окружности);

$\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n,\ n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{3}{4}\pi+\pi n,\ n\in Z$.

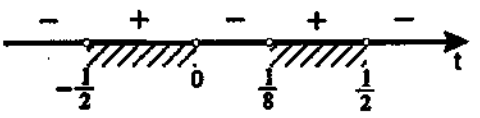
Ответ:	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3}{4}\pi+\pi n\right),\ n\in Z$.
2. Решить неравенство.	$\frac{sinx-2}{4sin^2x-1}>2.$

Обозначим $sinx=t$, получим:

$$\frac{t-2}{4t^2-1}>2;\ \frac{t-2}{4t^2-1}-2>0,\ \ \frac{-8t^2+t}{4t^2-1}>0;\ \frac{t(1-8t)}{(2t-1)(2t+1)}>0;\ \begin{cases} t(1-8t)(2t-1)(2t+1)>0 \\ t\neq\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Используем метод интервалов. Получим:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<t<0, \\ \frac{1}{8}<t<\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<sinx<0, \\ \frac{1}{8}<sinx<\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$



Решив каждое из неравенств, получим:

$$-\frac{1}{2}<sinx<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<2\pi n,\ \ n\in Z, \\ \pi+2\pi k<x<\frac{7}{6}\pi+2\pi k,\ \ k\in Z. \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{8}<sinx<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} arcsin\frac{1}{8}+2\pi m<x<\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ \ m\in Z, \\ \frac{5}{6}\pi+2\pi p<x<\pi-arcsin\frac{1}{8}+2\pi p,\ \ p\in Z. \end{array}\right.$$

Решением данного неравенства является объединение решений неравенств совокупности.

Ответ:
$$\left(arcsin\frac{1}{8}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;2\pi k\right)\cup$$
$$\cup\left(\pi+2\pi m;\frac{7}{6}\pi+2\pi m\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi p;\pi-arcsin\frac{1}{8}+2\pi p\right),\ n,k,m,p\in Z.$$

3. Решить неравенство. $\sin x > \cos^2 x$.

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему: $\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$ или $\left(\sin x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > 0$. Но $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, поэтому $\sin x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, при $x \in R$, а $\sin x - \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 0$, то есть решениями данного неравенства будут решения неравенства $\sin x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k < x < \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$.

4. Решить неравенство. $2\cos 2x + \sin 2x > tgx$.

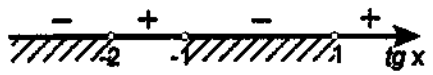
Решение.

Для решения неравенства используем универсальную подстановку.

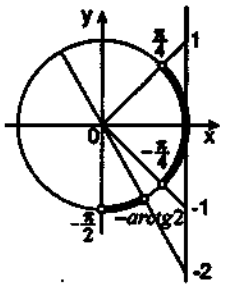
$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Перепишем данное неравенство в виде $2\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} + 2\frac{tgx}{1+tg^2 x} - tgx > 0$,

или $tg^3 x + 2tg^2 x - tgx - 2 < 0$, или $(tgx-1)\cdot(tgx+1)\cdot(tgx+2) < 0$.



Отсюда $\begin{cases} tgx < 1 \\ tgx > -1 \\ tgx < -2 \end{cases}$, тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2} + \pi k \\ x < -arctg2 + \pi k \end{cases} \quad ,k \in Z \\ \begin{cases} x > -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x < \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad ,n \in Z \end{array}\right.$



5. Доказать, что $\frac{\sin x + tgx}{\cos x + ctgx} > 0$ при всех допустимых значениях x.

Доказательство.

Имеем $\frac{\sin x \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x \cdot (1+\cos x)}{\cos^2 x \cdot (1+\sin x)} > 0 \ \ (\sin x \neq 0; \ \cos x \neq 0).$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Назвать дугу, являющуюся решением неравенства (используя рис.1).

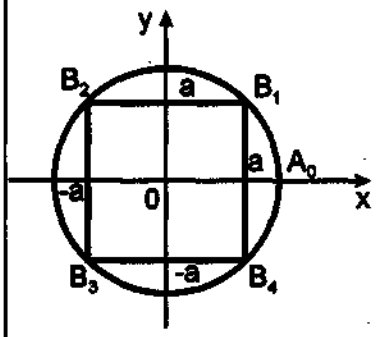


Рис.1.

а) $cosx > -a$; д) $sinx > -a$;

б) $cosx > a$; е) $sinx > a$;

в) $cosx < -a$; ж) $sinx < -a$;

г) $cosx < a$; з) $sinx < a$.

2. Записать в виде неравенств дуги (см. рис.1) при условии, что $\angle A_0OB_1 = \frac{\pi}{3}$, $\angle A_0OB_2 = \frac{2}{3}\pi$, $\angle A_0OB_3 = \frac{4}{3}\pi$, $\angle A_0OB_4 = \frac{5}{3}\pi$.

а) $\cup B_1B_2$; в) $\cup B_3B_4$; д) $\cup B_2B_3$; ж) $\cup B_1B_4$;

б) $\cup B_2B_1$; г) $\cup B_4B_3$; е) $\cup B_3B_2$; з) $\cup B_4B_1$.

3. Решить неравенство.

а) $cosx > \frac{1}{2}$; г) $cosx < 0$; ж) $sinx > -\frac{1}{2}$; к) $sinx > 0$;

б) $cosx > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $cosx > 0$; з) $sinx < \frac{\sqrt{3}}{2}$; л) $sinx < 0$.

в) $cosx < \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $sinx > \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $sinx > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4. Записать в виде неравенства дуги, если $\angle A_0OB_1 = \frac{\pi}{3}$; (см. рис.2).

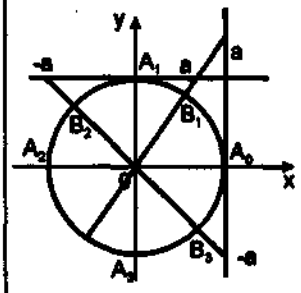


Рис.2.

а) $\cup B_1A_1$ для $tgx \geq -a$; г) $\cup A_0B_2$ для $ctgx \geq -a$;

б) $\cup A_3B_3$ для $tgx \leq -a$; д) $\cup A_0B_1$ для $ctgx \geq a$;

в) $\cup A_3B_1$ для $tgx \leq a$; е) $\cup B_2A_2$ для $ctgx \leq -a$.

5. Решить неравенство.

а) $tgx \geq -2$; г) $tgx \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$; ж) $ctgx \leq -3$; к) $sin2x > \frac{1}{2}$; н) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $tgx \geq 5$; д) $ctgx > 1$; з) $ctgx < \frac{1}{\sqrt{3}}$; л) $tg\left(-\frac{x}{2}\right) < 1$; о) $cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$.

в) $tgx < \sqrt{3}$; е) $ctgx > -3$; и) $sin2x < \frac{1}{2}$; м) $sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

6. Решить неравенство.

а) $\cos 2x + \cos x > 0$; б) $4\cos^2 x + 2\sin^2 x < 5\cos x$;

в) $\cos 4x + \cos 2x \le 2$; г) $3\cos x > 2\sin^2 x$.

7. Найти область определения функции.

а) $y = \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$; д) $y = \sqrt{-\cos x}$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$; е) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$;

в) $y = \sqrt{\cos \frac{x}{2} - 2}$; ж) $y = \sqrt{1 - tgx}$;

г) $y = \sqrt{\cos 2x + 5\cos x + 3}$; з) $y = \sqrt{tgx\,ctgx}$.

8. Решить неравенство.

а) $\sin \frac{3}{2}x \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3}{2}x > 0$; е) $\frac{5 + 3tg^2 x}{1 + tg^2 x} > 5\cos x$;

б) $\cos 8x \cos 2x + \sin 8x \sin 2x < 0$; ж) $\frac{tg3x + tgx}{1 - tgx\,tg3x} \le 1$;

в) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sin 2x}{\sin x} \le 1$;

г) $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 > 0$; и) $\sin x(2\cos x - 1) \le 0$;

д) $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} < 0$; к) $\sin x + \sin 3x \le 0$.

9. Решить неравенство.

а) $\sin 4x + \cos 4x\,ctg2x > 1$; б) $2 + tg2x + ctg2x < 0$;

в) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$; г) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 x < 1$;

д) $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$; е) $0 < \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos \frac{x}{3} < \frac{1}{2}$; з) $0 < \sin \frac{x}{2} + 1 \le \frac{1}{2}$;

и) $\frac{1}{2} \le \cos 2x - \frac{1}{2} < 1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-1

Тема. Решение простейших тригонометрических неравенств

В-I	7 баллов	В-II
1. Решить неравенство.		
а) $\sin x > 3$; б) $\cos x < 5$.		а) $\cos x > 7$; б) $\sin x < 1,2$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{\cos 2x}$.		$y = \sqrt{-\sin\frac{x}{2}}$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Решить неравенство.		
а) $\sin x > -3$; б) $\cos x < 9$.		а) $\cos x > -1,7$; б) $\sin x < 12$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.		$y = \sqrt{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить неравенство.		
а) $\sin x > tg\frac{\pi}{3}$; б) $\cos x \le ctg\frac{\pi}{4}$.		а) $\cos x \ge -tg\frac{\pi}{4}$; б) $\sin x < ctg\frac{\pi}{6}$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \frac{1}{\sqrt{tg3x}}$.		$y = \frac{1}{\sqrt{-ctg\frac{x}{3}}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-3-2

Тема. Решение тригонометрических неравенств

Решить неравенство.

В-I	7 баллов	В-II	В-III	9 баллов	В-IV
а) $\sin 3x < -\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}tgx > -1$.		а) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} \ge 1$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}tgx \le -1$.	а) $2\sin x(-5x) > -\sqrt{3}$; б) $4tg2x \ge 0$.		а) $-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{x}{7}\right) < \frac{1}{4}$; б) $3tg2x \le 0$.

В-V	12 баллов	В-VI
а) $\cos 2x > \frac{1}{5}$; б) $ctg\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \ge \sqrt{3}$; в) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 2x > \frac{1}{2}$.		а) $5\sin\frac{x}{3} < -1$; б) $\sqrt{3}ctg\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - 1 \le 0$; в) $\cos^2\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}x\right) > \frac{1}{2}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-3-1

Тема. Решение тригонометрических неравенств

В-I	7 баллов	В-II
Решить неравенство.		
а) $\sin\frac{x}{2} \le 1$; б) $\cos\frac{x}{8} > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $tg4x < 1$; г) $\cos^2 3x - \sin^2 3x < \frac{1}{2}$.		а) $\cos 17x > -2$; б) $\sin 8x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $ctg\frac{x}{4} > -1$; г) $2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Решить неравенство.		
а) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > 5$; б) $\cos\frac{1}{4}x < -\frac{1}{2}$; в) $2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$; г) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$.		а) $\cos^2\frac{x}{13} - \sin^2\frac{x}{13} < -10$; б) $\sin\frac{1}{5}x < \frac{1}{2}$; в) $3 - 2\cos^2 x - 3\sin x > 0$; г) $1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{1 - tgx}$.		$y = \sqrt{ctgx + 1}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить неравенство.		
а) $1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \ge -20$; б) $\sin(60° - 4x) \ge \sin(-150°)$; в) $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 1,5x\right)\cos\left(1,5x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}$; г) $2\cos^2 2x - 1 \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.		а) $\sin 3x\cos 2x - \cos 2x\sin 3x < 6$; б) $2\sin\left(\frac{5}{6}\pi - 2x\right) \le -tg\frac{3}{4}\pi$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) < 1$; г) $\cos 2x + \sin x < 0$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \sqrt{tg2x - \sqrt{3}}$.		$y = \frac{1}{\sqrt{-ctg\frac{x}{3} + \sqrt{3}}}$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

Тригонометрические неравенства

Решение тригонометрических неравенств сводится к тому, чтобы с помощью преобразований привести неравенство к виду $f(x)>0$ или $f(x)<0$, где $f(x)$ — некоторая тригонометрическая функция.

1. Решить неравенство.	$\cos x \geq \dfrac{\sin^2 x}{2-\cos x}$.

Решение.

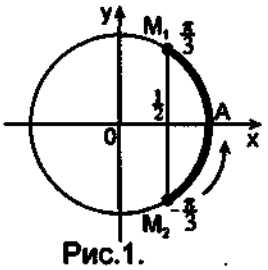


Рис.1.

Перенесём все члены неравенства в левую часть и приведём к общему знаменателю:

$\cos x - \dfrac{\sin^2 x}{2-\cos x} \geq 0$; $\dfrac{2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{2-\cos x} \geq 0$; $2-\cos x > 0$,

$2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x \geq 0$; $2\cos x - 1 \geq 0$; $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$. Получим простейшее неравенство, решением которого является дуга M_2M_1, то есть неравенство $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ соблюдается на промежутке $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}+2\pi k$.

Ответ:	$-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}+2\pi k$.

2. Решить неравенство.	$\sin x(1+tg^2 x) > \sqrt{2}$.

Решение.

Неравенство определено при $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$ и эквивалентно неравенству $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} > \sqrt{2}$;

$\sin x - \sqrt{2}\cos^2 x > 0$; $\sin x - \sqrt{2}(1-\sin^2 x) > 0$; $\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} > 0$.

Установим $\sin x = t$, причём $|t| \leq 1$. Тогда $\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} > 0$; $t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $t_2 = -\sqrt{2}$;

$\sqrt{2}\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(t+\sqrt{2}) > 0$. Учитывая, что $|t| \leq 1$, получим $t - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$ и $t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k < x < \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$. Учитывая, что $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, окончательно найдём $\dfrac{\pi}{4}+2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2}+2\pi k \cup \dfrac{\pi}{2}+2\pi k < x < \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$.

3. Решить неравенство.	$\cos x > \sin(x-1)$ при условии $0 \leq x < 2\pi$.

Решение.

Неравенство эквивалентно неравенствам: $\cos x - \sin(x-1) > 0$;

$-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) - \sin(x-1) > 0$; $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(x-1) < 0$; $2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$;

$\cos\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$, поэтому $\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{1}{2}+2\pi k < x < \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}+2\pi+2\pi k$.

Окончательно получим $\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{1}{2} < x < 2\pi$.

Для решения тригонометрических неравенств можно использовать метод интервалов.

4. Решить неравенство.	$\cos x + \cos 3x > 0$.

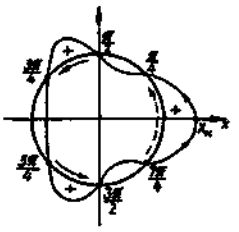
Составим алгоритм решения:

1) Разложим левую часть неравенства на множители: $2\cos 2x \cos x > 0$.

2) Найдём область определения функции: $y = 2\cos 2x \cos x,\ x \in R$.

3) Найдём нули функции:

$$y = 2\cos 2x\cos x \quad \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0;\\ \cos x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z,\\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\end{array}\right.$$



4) На единичную окружность нанесём область определения и нули функции.

Определим знак функции на полученных промежутках:

$\left(\frac{7}{4}\pi;\frac{\pi}{4}\right)$: $\varphi = 0;\ y(\varphi) = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1 > 0;$

$\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$: $\varphi = \frac{\pi}{3};\ y(\varphi) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} < 0$ и т.д.

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n;\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n;\frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z .$$

Приведенный пример имеет одну особенность. Серии x_1 и x_k могут совпадать на единичной окружности.

Если точки разных серий совпадают, то их называют **кратными**. Точки, повторяющиеся в чётном числе серий, называют **точками чётной кратности**, а повторяющиеся в нечётном числе серий, — **точками нечётной кратности**. Волнистая линия, проходящая от точки x_k, после встречи с точкой нечётной кратности должна перейти в другую область (то есть, если была за границами единичной окружности, то теперь будет в середине нее, и наоборот). Рис.2.

Точка чётной кратности не даёт линии возможность перейти в другую область.

5. Решить неравенство.	$\frac{sinx \cdot sin3x}{cosx \cdot sin2x} > 0$.

$\frac{sinx \cdot sin3x}{cosx \cdot sin2x} > 0$; $sinx \cdot sin3x \cdot cosx \cdot sin2x > 0$

Воспользуемся алгоритмом, данным при решении неравенства 4.

Нули функции $y = sinx \cdot sin3x \cdot cosx \cdot sin2x$

$$\begin{cases} sinx = 0; \\ sin3x = 0; \\ cosx = 0; \\ sin2x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pi n; \\ x_2 = \frac{\pi n}{3}; \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n; \\ x_4 = \frac{\pi n}{2}; \ n \in Z. \end{cases}$$

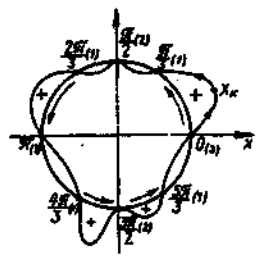


Рис.3.

Ответ:	$2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z,$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \ n \in Z,$ $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z,$ $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z.$

6. Решить неравенство.	$\frac{tgx \cdot sin3x}{cosx \cdot sin2x} > 0$.

Решение.

Рассмотрим систему уравнений и набор значений x, следующих из неё:

$$\begin{cases} tgx = 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ sin3x = 0, \\ cosx = 0, \\ sin2x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pi n, \\ x_1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x_2 = \frac{\pi n}{3}, \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x_4 = \frac{\pi n}{2}. \end{cases}$$

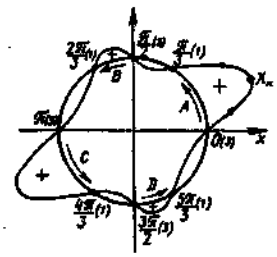


Рис.4.

При записи ответа заметим, что интервалы A и C, B и D центрально симметричны. Это и отражено на рис.4. Поэтому их можно объединить одной записью.

Ответ:	$\begin{cases} \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n. \end{cases}$

7. Решить неравенство.	$\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{3}>0$.

Решение.

Найдём наименьшее общее кратное знаменателей дробей — число 12 — и произведём в исходном неравенстве замену $y=\frac{x}{12}$. Тогда оно приобретёт вид $\sin 3y\cdot\cos 4y>0$.

Решение последнего неравенства проводится так же, как и предыдущих. Из системы уравнений

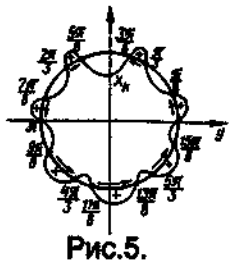


Рис.5.

$$\begin{cases}\sin 3y=0,\\ \cos 4y=0\end{cases}$$ получаем $$\begin{cases}y_1=\frac{\pi n}{3},\\ y_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.\end{cases}$$

На тригонометрической окружности отметим все точки, представляющие серии значений y_1 и y_2. Пусть $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Тогда $\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\frac{4\pi}{2}=-1$.

Значит, точку x_k надо взять на луче Oy в середине окружности. Линия, начинающаяся в точке x_k, перейдёт из внутренней части окружности на внешнюю в каждой из отмеченных точек (см. рис.5). Все области, имеющие на рис.5 знак «+», дают искомые значения y, из которых умножением на 12 получим необходимые интервалы для значений x.

Для решения тригонометрических неравенств вида $\frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}>0$ $(<0,\ \geq 0,\ \leq 0)$ можно использовать метод секторов.

В методе секторов каждому множителю вида $(f(x)-a)$, где $f(x)$ — одна из функций $\sin x$ или $\cos x$, и $-1<a<1$, в тригонометрической окружности соответствуют два угла x_1 и x_2 $(f(x_1)=f(x_2)=a)$, разделяющие окружность на два сектора. При переходе через x_1 и x_2 функция $(f(x)-a)$ изменяет знак.

Необходимо помнить!

1. Множители вида $(\sin x-a)$ и $(\cos x-a)$, где $|a|>1$, сохраняют знак для всех значений x. Такие множители числителя и знаменателя отбрасывают, изменяя (если $a>1$) при каждом отбрасывании знак неравенства на противоположный.
2. Множители вида $(\sin x\pm 1)$ и $(\cos x\pm 1)$ также отбрасывают, причём, если это множители знаменателя, то в систему неравенств добавляют неравенства вида $\sin x\neq\pm 1$ и $\cos x\neq\pm 1$. При отбрасывании множителей вида $(\sin x-1)$ или $(\cos x-1)$ знак неравенства изменяют на противоположный.

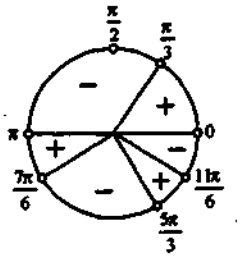
8. Решить неравенство.	$\dfrac{2\sin^3 x-\sin^2 x-\sin x}{2\cos^2 x+3\cos x-2}>0$.

Решение.

Раскладывая числитель и знаменатель на множители, запишем неравенство в виде $\dfrac{\sin x(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(2\cos x-1)(\cos x+2)}>0$.

Эквивалентная система неравенств:

$$\begin{cases}\sin x\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)<0;\\ \sin x\neq 1.\end{cases}$$



При $x=\dfrac{\pi}{4}$ левая часть первого неравенства положительная. Значит, в секторе $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ знак левой части «+». Для других секторов проводим чередование знаков.

Учитываем, что $x\neq\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ \dfrac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{5\pi}{3}+2\pi n,$
$-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n<x<2\pi n,\ n\in Z.$

При решении неравенств, содержащих $\sin x$, $\cos x$, tgx и $ctgx$ одновременно, или содержащих тригонометрические фунции разных аргументов, необходимо найти общий период функций, входящих в неравенства, и, используя разные тождественные преобразования, разложить неравенство на простейшие множители.

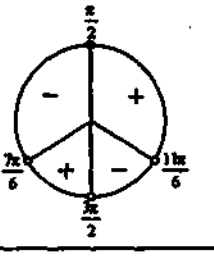
9. Решить неравенство.	$\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$.

Решение.

Имеем: $-\cos 5x>\sin 10x$, $2\sin 5x\cos 5x+\cos 5x<0$, $\cos 5x\left(\sin 5x+\dfrac{1}{2}\right)<0$.

Пусть $5x=t$. Тогда $\cos t\left(\sin t+\dfrac{1}{2}\right)<0$.

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<t<\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n;\\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n<t<\dfrac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.\end{cases}$$



Ответ:	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5}<x<\dfrac{7\pi}{30}+\dfrac{2\pi n}{5};\\ \dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5}<x<\dfrac{11\pi}{30}+\dfrac{2\pi n}{5},\ n\in Z.\end{cases}$

10. Решить неравенство.	$sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

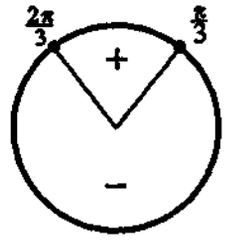
Решение.

Воспользуемся формулами $sin3x = 3sinx - 4sin^3 x$, $cos3x = 4cos^3 x - 3cosx$.

Имеем: $(3sinx - sin3x)cos3x + (cos3x + 3cosx)sin3x \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$sinxcos3x + cosxsin3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Пусть $4x = t$,

получим $sint - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.



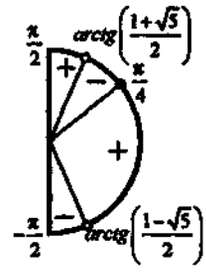
Ответ:	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$
11. Решить неравенство.	$tgx \geq \frac{tg2x - 2}{tg2x + 2}$.

Решение.

ОДЗ: $cosx \neq 0$, $cos2x \neq 0$. Используя формулу $tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$, запишем в области определения неравенства эквивалентное неравенство:

$$\frac{tg^3 x - 1}{tg^2 x - tgx - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{tgx - 1}{\left(tgx - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(tgx - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \geq 0 ,$$

$$\left[\begin{array}{l} arctg\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n; \\ arctg\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

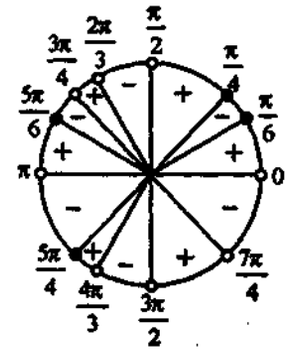


12. Решить неравенство.	$\frac{\left(sinx - \frac{1}{2}\right)(tgx - 1)}{\left(cosx + \frac{1}{2}\right)(ctgx + 1)} \geq 0.$

Решение.

Тут общий период функций $T = 2\pi$. Решаем неравенство в тригонометрической окружности, отмечая все углы, при которых числитель и знаменатель превращаются в ноль или не определены.

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n < x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \pi + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

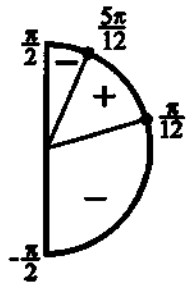


13. Решить неравенство. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3tgx$.

Решение.

$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} \geq 0$, $\frac{2\cos^2 2x - 3\sin 2x}{\cos^2 x} \geq 0$, $\frac{2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2}{\cos^2 x} \leq 0$,

$\frac{(\sin 2x + 2)(2\sin 2x - 1)}{\cos^2 x} \leq 0$, $\sin 2x - \frac{1}{2} \leq 0$ $(\cos x \neq 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n)$.



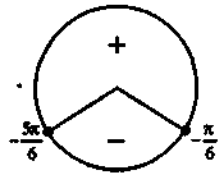
Период $\sin 2x$ є $T = \pi$.

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \frac{\pi}{12} + \pi n, \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

14. Решить неравенство. $5 + 2\cos 2x \leq 3|2\sin x - 1|$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $7 - 4\sin^2 x \leq 3|2\sin x - 1|$.



1) $\left\{\begin{array}{l} \sin x \geq \frac{1}{2}, \\ 2\sin^2 x + 3\sin x - 5 \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x \geq \frac{1}{2}, \\ (\sin x - 1)(2\sin x + 5) \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \sin x = 1$

2) $\left\{\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ (\sin x - 2)(2\sin x + 1) \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2} \\ \sin x \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \leq 0.$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Решить неравенство.

а) $\cos 4x + \cos 2x < 0$;

б) $ctg^3 x + ctg^2 x - ctgx - 1 < 0$;

в) $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}tgx) < 5$.

2. Решить неравенство методом интервалов.

а) $\sin x > \cos^2 x$; б) $1 - 2\cos^2 x \leq 0$;

в) $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x$; г) $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$; д) $\sin x + \cos 2x > 1$.

3. Решить неравенство методом секторов.

а) $ctg^2 x + ctgx > 0$; б) $tg^3 x - 3tgx \leq 0$;

в) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$; г) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

§ 4. Степенная функция

Иррациональные уравнения и неравенства

Определения	Примеры
Корнем n-ой степени из числа a называется такое число, n-ая степень которого равна числу a (число n — натуральное число). $\sqrt[n]{a}$ —корень; n — показатель; a — подкоренное выражение.	$\sqrt[5]{32} = 2$, $2^5 = 32$; $\sqrt[6]{729} = 3$, $3^6 = 729$; $\sqrt[3]{-125} = -5$, $(-5)^3 = -125$; $\sqrt[5]{-768} = -4$, $(-4)^5 = -768$.
Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа называется такое неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.	$\sqrt[4]{81} = 3$ — *арифметический корень*; $\sqrt[5]{-243} = -3$ — неарифметический корень; $\sqrt{25} = 5; \sqrt{9} = 3$ — арифметические корни.

Показатели корней вида $n = 2k+1$ используют для обозначения любых корней.
Показатели корней вида $n = 2k$ используют для обозначения арифметических корней.
Показателем корня может быть любое натуральное число, но показатель корня $n = 1$ не рассматривается.

Свойства корней

1. Корень чётной степени из отрицательного числа не определён. $\sqrt[2k]{a} = b$, если $a \geq 0$. $\sqrt{-9}$ — не существует.	2. Корень нечётной степени определён из любого числа. $\sqrt[2k+1]{a} = b$, $a \in R$. $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[3]{343} = 7$.
3. $\sqrt[n]{0} = 0$.	4. $\sqrt[n]{1} = 1$.

Действия с корнями n-ой степени

1. Произведение корней n-ой степени.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $a \geq 0$; $b \geq 0$	$\sqrt[12]{128} \cdot \sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{128 \cdot 32} =$ $= \sqrt[12]{2^7 \cdot 2^5} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $a \geq 0$; $b \geq 0$.

2. Частное корней n-ой степени.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $a \geq 0$; $b > 0$.	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{-2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $a \geq 0$; $b > 0$.

3. Степень корня.

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ $a \geq 0$; k — целое; n — натуральное.	$(2\sqrt[5]{0,25})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt[5]{0,25})^5 =$ $= 2^5 \cdot 0,25 = 8.$	$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ $a \geq 0$; k — целое; n — натуральное.

4. Корень из корня.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $a \geq 0$, m, n — натуральные.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}.$

5. Приведение корня к новому показателю.

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a \geq 0$; m, n, p — натуральные.	$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$; $\sqrt[12]{5^4} = \sqrt[3]{5}.$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{25^2} =$ $= \sqrt[6]{5^3 \cdot 5^4} = \sqrt[6]{5^7} = 5 \cdot \sqrt[6]{5}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ $a \geq 0$; m, n, p — натуральные.

6. Внесение множителя под корень.

$a^n\sqrt{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ $a \geq 0$; $b \geq 0$.	$6\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{6^2 \cdot 1\frac{1}{3}} = \sqrt{36 \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{12 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$

7. Извлечение корня чётной степени.

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$ $a \geq 0$; n — натуральное.	$\sqrt{(-22)^2} = \lvert -22 \rvert = 22$; $\sqrt[4]{b^5 c^4} = \lvert b \rvert \lvert c \rvert \sqrt[4]{b}.$

8. Извлечение корня нечётной степени.

$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$ $a \geq 0$; n — натуральное. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $a \geq 0$; n — натуральное.	$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$; $\sqrt[5]{b^7 c^9} = bc\sqrt[5]{b^2 c^4}.$ $\sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128} = -2.$

9. Формула сложного радикала.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$a > 0$; $b > 0$; $a^2 - b > 0$.

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$a > 0$; $b > 0$; $a^2 - b > 0$.

Формулы сокращённого умножения относительно корней

1. Разность квадратов.

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$
$= (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b.$

Сократить дробь:

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

Ответ: $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

2. Сумма кубов.

а) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2) =$
$= (\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3 = a+b;$

б) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3 =$
$= (\sqrt{a}+\sqrt{b})((\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2) =$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b).$

$$\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} = \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^3-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} =$$
$$= (\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{xy}+(\sqrt[3]{y})^2 = \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$..

3. Разность кубов.

а) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2) =$
$= (\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3 = a-b;$

б) $a\sqrt{a}-b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3 =$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})((\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2) =$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b).$

$$\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$$
$$= x+\sqrt{xy}+y.$$

Ответ: $x+\sqrt{xy}+y$.

4. Выделение полного квадрата под знаком корня.

$\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$
если $a+2b = x+y+2\sqrt{xy}$, то есть
$x+y = a$ и $xy = b,$
тогда $a+2\sqrt{b} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3+2\sqrt{1\cdot 3}} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{1}+\sqrt{3})^2} = |1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}.$$

Ответ: $1+\sqrt{3}$.

Определение степени с рациональным показателем

1. Произведение одинаковых множителей

$$\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n \quad (n \in N)$$

называют **возведением в степень.**
a — основание степени;
n — показатель степени.

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32};$
$(-0,2)^3 = -0,008$
$0^n = 0.$
$1^n = 1.$

2. $a^1 = a.$

$(-11)^1 = -11;\ (1,7)^1 = 1,7.$

3. $a^0 = 1,\ a \neq 0;$ 0° — не определено.

$(13,01)^0 = 1;\ (a^5b^{13}x)^0 = 1.$

4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};\ \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3;\ 5^{-1} = \frac{1}{5}.$

5. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a>0;\ n\geq 2;\ n \in N.$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a>0,\ n \in N,\ n\geq 2,\ m \in Z.$

$625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5.$

$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2.$

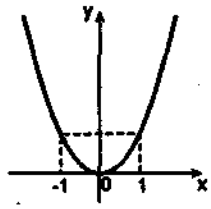
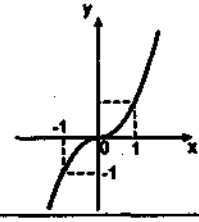
$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 2^3 = 8.$

Свойства степеней		
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$0,2^{1,7} \cdot 0,2^{0,3} = 0,2^2 = 0,04;$ $9^{\frac{3}{2}} \cdot 3 = 3^3 \cdot 3 = 3^4 = 243.$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^6} = 3^{-1} = \frac{1}{3};\ \frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9.$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(1,7^5)^{0,2} = 1,7^1 = 1,7.$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(0,5 \cdot 3^{0,5})^2 = 0,5^2 \cdot 3^1 = 0,25 \cdot 3 = 0,75.$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ b \neq 0$	$\frac{25^3}{100^3} = \left(\frac{25}{100}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n\ b \neq 0$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}.$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $b \neq 0,\ a \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$	$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ $b \neq 0,\ a \neq 0$

Степенная функция

Функция вида $y = x^\alpha$, где x — независимая переменная (аргумент), а α — любое действительное число, называется **степенной функцией**.

Свойства функции $y = x^\alpha$ ($\alpha = n$ — натуральный показатель)

$y = x^{2k}, (k \in N)$.	$y = x^{2k+1}, (k \in N)$.
	

1. Область определения. Функция $y = x^n$ определена при всех действительных значениях x $(x \in R)$.

2. Область значения.

$y \geq 0$ (y — неотрицательное число).	$y \in R$ (y — любое действительное число).

3. Нули функции.

При $x = 0$ $y = 0$, то есть график функции проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства.

Функция положительная при $x \neq 0$.	При $x > 0$ функция положительная ($y > 0$). При $x < 0$ функция отрицательная ($y < 0$).

5. Чётность и нечётность.

Функция чётная, график её симметричен относительно оси Oy.	Функция нечётная, график её симметричен относительно начала координат.

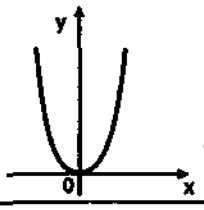
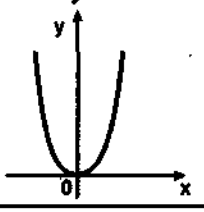
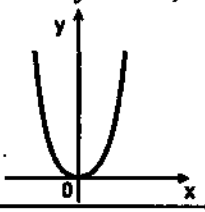
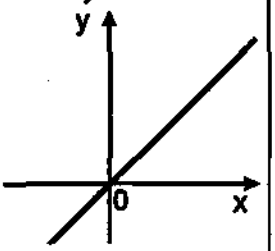
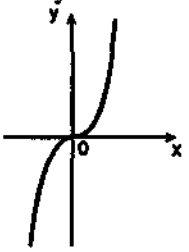
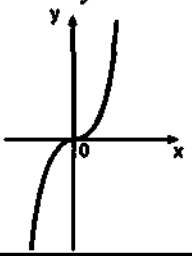
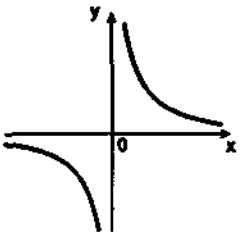
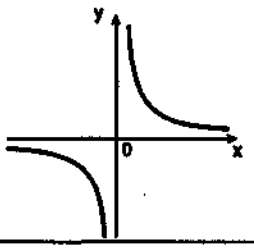
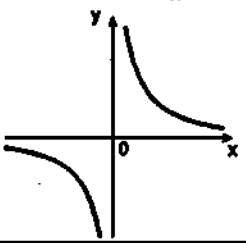
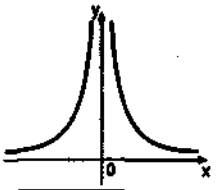
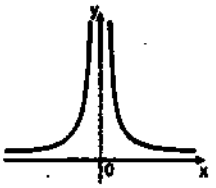
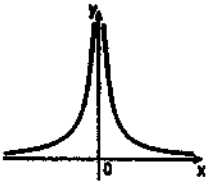
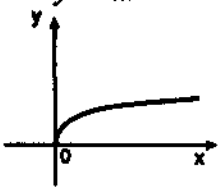
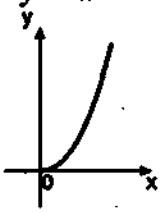
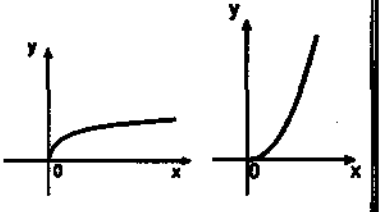
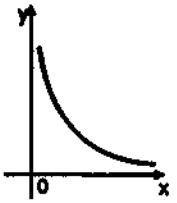
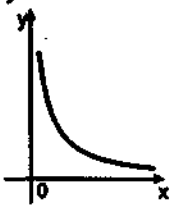
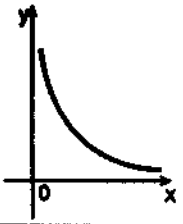
6. Интервалы возрастания и убывания функции.

При $x < 0$ функция убывает. При $x > 0$ функция возрастает.	Функция возрастает при $x \in R$.

7. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Наименьшее значение $y = 0$, при $x = 0$; наибольшего значения не имеет.	Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

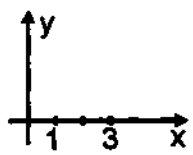
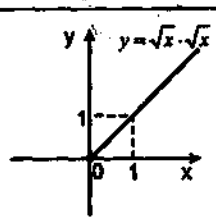
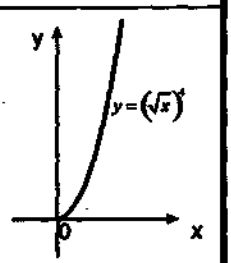
Графики степенной функции ($y = x^\alpha$)

α — чётное натуральное число	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2k}, k \in N$ 
α — нечётное натуральное число	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2k+1}, k \in N$ 
α — нечётное отрицательное число	$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}, k \in N$ 
α — чётное отрицательное число	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}, k \in N$ 
α — нецелое положительное число	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha (\alpha > 0, \alpha$ — нецелое)  $0 < \alpha < 1$ $\alpha > 1$
α — нецелое отрицательное число	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha (\alpha < 0, \alpha$ — нецелое) 

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Вынести множители из-под знака корня.	$\sqrt[4]{\dfrac{32x^6y^{11}}{6a^5}}$.
• Представим множители подкоренного выражения в четвёртой степени: • Извлечём корень четвёртой степени из произведения и дроби и упростим полученное выражение:	$\sqrt[4]{\dfrac{32x^6y^{11}}{6a^5}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4\cdot 2\cdot x^4\cdot x^2\cdot (y^2)^4\cdot y^3}{2\cdot 3\cdot a^4\cdot a}} =$ $= \dfrac{2\lvert x\rvert\lvert y^2\rvert}{\lvert a\rvert}\sqrt[4]{\dfrac{x^2y^3}{3a}} = \dfrac{2\lvert x\rvert y^2}{a}\sqrt[4]{\dfrac{x^2y^3}{3a}}$, так как $y \geq 0$; $a > 0$.
Ответ:	$\dfrac{2\lvert x\rvert y^2}{a}\sqrt[4]{\dfrac{x^2y^3}{3a}}$.
2. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.	$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.
Для этого можно использовать формулы сокращённого умножения применительно к корням. Домножим числитель и знаменатель на выражение, дополняющее знаменатель до разности квадратов:	а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} =$ $= \dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2.$
Домножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы:	б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$ $= \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3-1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}.$
Ответ:	$\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$.
3. Вычислить.	$\sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{63^2-27^2}{5}}}$.
Решение.	1) $\dfrac{63^2-27^2}{5} = \dfrac{(63-27)(63+27)}{5} = \dfrac{36\cdot 90^{18}}{\cancel{5}_1} = 36\cdot 18.$ 2) $\dfrac{12}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{36\cdot 18} = \dfrac{12\cdot 6\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12\cdot 18.$ 3) $\sqrt[3]{12\cdot 18} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3^3} = 6.$
Ответ:	6.

4. Вычислить.	$(4\sqrt{7}-\sqrt{119}-4\sqrt{3}+\sqrt{51})(4\sqrt{7}+\sqrt{119}+4\sqrt{3}+\sqrt{51})$.
Решение. 1) Разложим на множители первую скобку: 2) Разложим на множители вторую скобку: 3) Используем формулу разности квадратов:	1) $4\sqrt{7}-\sqrt{119}-4\sqrt{3}+\sqrt{51}=$ $=4\sqrt{7}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}-4\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}=$ $=(4\sqrt{7}-4\sqrt{3})-(\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{17})=$ $=4(\sqrt{7}-\sqrt{3})-\sqrt{17}(\sqrt{7}-\sqrt{3})=(4-\sqrt{17})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$. 2) $4\sqrt{7}+\sqrt{119}+4\sqrt{3}+\sqrt{51}=$ $=4\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}=$ $=(4\sqrt{7}+4\sqrt{3})+(\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{17})=$ $=4(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\sqrt{17}(\sqrt{7}+\sqrt{3})=$ $=(4+\sqrt{17})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$. 3) $(4-\sqrt{17})(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})(4+\sqrt{17})=$ $=(4^2-(\sqrt{17})^2)((\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2)=$ $=(16-17)(7-3)=-4$.
Ответ:	-4.
5. Вычислить.	$(\sqrt{21}-2)\sqrt{25+2\sqrt{84}}$.
Решение. Внесём множитель под корень:	$(\sqrt{21}-2)\sqrt{25+2\sqrt{84}}=\sqrt{(\sqrt{21}-2)^2(25+2\sqrt{84})}=$ $=\sqrt{(25-4\sqrt{21})(25+4\sqrt{21})}=\sqrt{25^2-(16\cdot 21)}=$ $=\sqrt{289}=17$.
Ответ:	17.
6. Упростить выражение.	$(m\sqrt{m^3}+5\sqrt{m^3}+m\sqrt{18}+15\sqrt{2}):\dfrac{3m+15}{2\sqrt{m^3}-6\sqrt{2}}$. Вычислить при $m=3$.
Решение. 1) Вынесем множители из-под знака корня и разложим выражение на множители: 2) Выполним деление: 	1) $m\sqrt{m^3}+5\sqrt{m^3}+m\sqrt{18}+15\sqrt{2}=$ $=m^2\sqrt{m}+5m\sqrt{m}+3m\sqrt{2}+15\sqrt{2}=$ $=m\sqrt{m}(m+5)+3\sqrt{2}(m+5)=$ $=(m+5)(m\sqrt{m}+3\sqrt{2})$. 2) $(m+5)(m\sqrt{m}+3\sqrt{2}):\dfrac{3(m+5)}{2(m\sqrt{m}-3\sqrt{2})}=\dfrac{2}{3}(m^3-18)$. При $m=3$ $\dfrac{2}{3}(m^3-18)=\dfrac{2}{3}(27-18)=6$.
Ответ:	6.

7. Упростить выражение.	$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{5})(a-\sqrt{5a}+5)}{a+5}\right):\left(\frac{a\sqrt{a}+\sqrt{125}}{(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2}\right)$. Вычислить при $a = 95$.
Решение.	$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{5})(a-\sqrt{5a}+5)}{a+5}\right)\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{5})(a-\sqrt{5a}+5)} =$ $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{5})(a-\sqrt{5a}+5)\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{5})}{(a+5)(a-\sqrt{5a}+5)} = \frac{a-5}{a+5}$. При $a = 95$ $\frac{a-5}{a+5} = \frac{95-5}{95+5} = \frac{90}{100} = 0,9$.
Ответ:	0,9.
8. Построить график функции.	$y = \sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$.
Найдём ОДЗ функции: Найдём область определения функции:	$\begin{cases}x-3\ge 0,\\ 3-x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 3\\ x\le 3\end{cases}$ $x = 3$.  Функция имеет значение при $x = 3$, $y = f(3) = 0$.
Ответ:	точка (3;0).
9. Построить график.	$y = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.
Найдём ОДЗ функции: Преобразуем функцию: Построим график функции:	$x\ge 0$, $y = \sqrt{x^2}$. $\begin{cases}y = \lvert x\rvert;\\ x\ge 0.\end{cases}$ 
10. Построить график.	$y = (\sqrt{x})^4$.
Найдём ОДЗ функции: Преобразуем функцию: Построим график функции:	$x\ge 0$, $y = x^2$. $\begin{cases}y = x^2;\\ x\ge 0.\end{cases}$ 

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить.

а) $\sqrt{1,25}+\sqrt{80}-\frac{1}{14}\sqrt{245}-180$;

б) $\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}+\frac{7}{2\sqrt{2}+1}-(115\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$;

в) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)+\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}-\sqrt{10}$;

г) $\sqrt[3]{29+\sqrt{(27^2-22^2)\cdot 5}}$;

д) $\sqrt[3]{\frac{23}{64}+\sqrt{\frac{5}{48^2-32^2}}}$.

е) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{5})$.

2. Вычислить.

а) $\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\right)72^{\frac{1}{2}}}{3\left(2\sqrt{6}-16^{\frac{1}{2}}\right)\left(64^{\frac{1}{3}}+1\right)}$; б) $\frac{\left(3^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{7}\right)\left(18^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)^2}{24^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{56}}$; в) $\frac{\left(8+56^{\frac{1}{2}}\right)(1,5+0,25)}{\left(\sqrt{7}+8^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{2}}$.

3. Вынести множитель из-под знака корня.

а) $\frac{a}{3-a}\sqrt{\frac{(a-3)^2}{a^2}}$, если 0<a<3;

б) $\frac{a+2}{a}\sqrt{-\frac{a^3}{a^2+4a+4}}$, если -2<a<0;

в) $\frac{a(b-2)}{a-3}\sqrt{\frac{9-6a+a^2}{a^2(2-b)^2}}$, если 0<a<3, b>2.

4. Внести множитель под знак корня.

а) $\frac{a}{4b}\sqrt{\frac{16b^3}{a^2}}$, если $\begin{matrix}a<0,\\ b>0\end{matrix}$; б) $\frac{b}{3a^2}\sqrt{\frac{9a^6}{b^2}}$, если $\begin{matrix}a>0,\\ b<0\end{matrix}$; в) $\frac{a-3}{3b}\sqrt{\frac{9b^2}{a^2-4a+4}}$, если $\begin{matrix}a<2,\\ b>0\end{matrix}$.

5. Вычислить.

а) $\left(\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}\right)^{-2}\cdot\left(\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{16\frac{1}{3}}\right)^2$; б) $(3-2\sqrt{2})\sqrt{17+12\sqrt{2}}+(\sqrt{3}-2)\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

6. Удовлетворяет ли $x=\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{34+24\sqrt{2}}$ неравенство $7x^2+58x+13>0$?

7. Упростить выражение.

а) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$;

б) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

в) $\frac{(x^2-b^2)^{-1}+(x^2+b^2)^{-1}}{(x^2-b^2)^{-1}-(x^2+b^2)^{-1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{x^2}\right)^{-1}$;

г) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-2ab^{\frac{1}{3}}+(ab)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-(ab)^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

д) $\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.

е) $\frac{\sqrt{c^3}-27}{c+8\sqrt{c}+16}\cdot\frac{c+4\sqrt{c}}{c+3\sqrt{c}+9}+\frac{\sqrt{3}+27}{c-8\sqrt{c}+16}\cdot\frac{c-4\sqrt{c}}{c-3\sqrt{c}+9}-\frac{56\sqrt{c}}{c-16}$.

8. Построить график функции.

а) $y=(\sqrt[4]{x})^4+1$; б) $y=\sqrt[4]{x^4}+1$; в) $y=2+\sqrt{x^4-8x^2+16}$.

9. Избавиться от иррациональности в знаменателе.

а) $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{13}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$; в) $\frac{8}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{2}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-1

Тема. Преобразование корней

В-I	**7 баллов**	**В-II**
1. Вычислить.		
а) $\frac{\sqrt[6]{256}}{\sqrt[3]{-2}}$; б) $\sqrt[14]{64}:\sqrt[7]{-16}$.		а) $\frac{\sqrt[10]{81}}{\sqrt[5]{-9}}$; б) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.
2. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.		
а) $\frac{2}{\sqrt{7}-3}$; б) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.		а) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.
В-III	**9 баллов**	**В-IV**
1. Вычислить.		
а) $\frac{1}{4+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$.		а) $\frac{3}{6-2\sqrt{6}}+\frac{3}{6+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$.
2. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.		
$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$.		$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$.
3. Упростить выражение.		
$a^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a}$.		$a^{\frac{5}{4}}:\sqrt[4]{a}$.
В-V	**12 баллов**	**В-VI**
1. Вычислить.		
а) $(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}})^2$; б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$.		а) $(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.
2. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.		
$\frac{6}{2-\sqrt[3]{4}}$.		$\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$.
3. Упростить выражение.		
$(3-\sqrt{5})^2-6\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.		$(2-\sqrt{3})^2-4\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-2

Тема. Преобразование выражений, содержащих корни

В-I	**7 баллов**	**В-II**
Упростить выражение.		
а) $\sqrt{a^2+8a+16}-a-4;\ a\ge -4$ б) $\sqrt[4]{\frac{9}{16}}\sqrt{\frac{33^2-25^2}{29}}$; в) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.		а) $\sqrt{9+6x+x^2}-x-6;\ x\ge -3$ б) $\frac{\left(4\sqrt{7}+4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2}{18+2\cdot 56^{\frac{1}{2}}}$; в) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$.

В-III	**9 баллов**	**В-IV**
Упростить выражение.		
а) $\sqrt{a^2+8a+16}-\lvert a+4\rvert-8$; б) $\frac{11\left(6^{\frac{1}{2}}-\sqrt{3}\right)^2}{12\left(3-2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}$; в) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$.		а) $\left(\frac{x^{1,5}-1}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right):\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; б) $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$; в) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$.

В-V	**12 баллов**	**В-VI**
1. Найти значение числового выражения.		
а) $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}\cdot\sqrt[5]{27}$; б) $\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{\frac{1}{2^3}}\right):\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.		а) $\sqrt[6]{5\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}$; б) $\left(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}}\right):\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.
2. Упростить выражение.		
$\left(a^{(\sqrt{3}-1)^2}:a^{(\sqrt{3}+1)^2}\right)^{-\sqrt{3}}$.		$\left(b^{(\sqrt{5}-2)^2}:b^{(\sqrt{5}+2)^2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-3

В-I	7 баллов	В-II

Упростить выражение.

В-I

а) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[4]{a^4}$, где $a>0$;

в) $\dfrac{a+8}{a^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{a}+4}$.

В-II

а) $\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}$;

б) $\sqrt[6]{a^6}-\sqrt[5]{a^5}$, если $a<0$;

в) $\dfrac{8b+1}{4b^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{b}+1}$.

В-III	9 баллов	В-IV

Упростить выражение.

В-III

а) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[6]{(3-\sqrt{10})^6}+\sqrt{10}$;

в) $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$.

В-IV

а) $\sqrt[5]{2\sqrt{7}-13}\cdot\sqrt[5]{13+2\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt[8]{(5-\sqrt{31})^8}-\sqrt{31}$;

в) $\dfrac{a+8}{a^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{a}+4}-\dfrac{a-8}{\sqrt[3]{a^2}+2a^{\frac{1}{3}}+4}$.

В-V	12 баллов	В-VI	12 баллов

Упростить выражение.

В-V

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}$;

в) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}$.

В-VI

а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

б) $\sqrt{a^2+a\sqrt{8}+2}+\sqrt{a^2-a\sqrt{8}+2}$;

в) $\left(\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$.

Иррациональные уравнения

Область определения иррациональных уравнений

Уравнение, в котором есть неизвестное под знаком корня или неизвестное имеет в степени дробь, называется **иррациональным**.

При решении таких уравнений необходимо помнить, что:

• в уравнении корни чётной степени являются арифметическими, это значит, что значение корня неотрицательное, кроме этого, подкоренное выражение положительное;

• все корни нечётной степени определены для любого подкоренного выражения, причём значение корня имеет тот же знак, что и подкоренное выражение.

Значит, решение иррациональных уравнений необходимо начинать с нахождения области определения уравнения, если в него входят корни чётной степени.

Область определения иррационального уравнения — это множество всех действительных значений x, при которых одновременно имеют смысл выражения, входящие в уравнение.

Корни уравнения, не удовлетворяющие исходное уравнение, называются **посторонними**.

Для того, чтобы исключить полученные в результате неравносильных преобразований посторонние корни, необходимо сделать проверку корней.

К появлению посторонних корней могут привести, но необязательно, такие преобразования, как возведение обеих частей уравнения, которые равны по абсолютным значениям, но могут отличаться знаком, в квадрат или в другую чётную степень.

Обратите внимание, что формальное использование свойств корня $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{a}\sqrt[2n]{b}$ или $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$ может привести к сужению области определения уравнения в целом, что недопустимо.

1) $\sqrt{x-3} = -2$.

Поскольку $\sqrt{x-3} \geq 0$ всегда, уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

2) $\sqrt{x-4} = 7$.

$$\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x-4 = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 53 \end{cases}$$

Ответ: 53.

Это уравнение решено методом равносильных преобразований, то есть с учётом области определения уравнения.

3) $\sqrt{3-x} = \sqrt{2x+1}$

$3-x = 2x+1$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$.

Проверка: $\sqrt{3-\frac{2}{3}} = \sqrt{2\cdot\frac{2}{3}+1}$.

$\sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{2\frac{1}{3}}$, то $x = \frac{2}{3}$ — корень уравнения.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Это уравнение решено без учёта области определения уравнения, поэтому сделана проверка полученного результата.

4) $\sqrt{x+5} = x-1$

$$\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ x+5 = x^2-2x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -5, \\ x \geq 1, \\ x^2-3x-4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 4, \\ x_2 = -1; \end{array}\right. \end{cases} \quad x = 4.$$

Ответ: 4.

Уравнение решено методом равносильности.

Основные методы решения иррациональных уравнений

1. Возведение обеих частей уравнения в степень и избавление от радикалов.

Решить уравнение $\sqrt{9-x} = x+3$.

Решение.

Так как в уравнении слева корень чётной степени, то $9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9$. Кроме того, правая часть уравнения должна быть положительной, поскольку слева имеем арифметический корень. Значит, $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ и тогда область значений переменной такая: $x \in [-3;9]$.

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$9-x = (x+3)^2 \Rightarrow x^2+6x+9+x-9 = x(x+7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -7$,

но $x_2 = -7 \notin [-3;9]$. Значит, уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

2. Отделение квадратного корня используется в тех случаях, когда это упрощает решение уравнения.

Решить уравнение $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

Решение.

Область определения уравнения $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;3]$.

Отделим один квадратный корень: $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x}$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$x+2 = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3 - x \Rightarrow 5 - x = 3\sqrt{3-x}$. Ещё раз возведём в квадрат:

$25 - 10x + x^2 = 9(3-x) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2$. Оба корня принадлежат области определения уравнения, но убедиться в том, что эти решения являются корнями уравнения, можно и проверкой.

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = 2$.

3. Отделение кубического корня.

Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$.

Решение.

Областью определения уравнения являются все действительные числа. Отделим один из корней и возведём обе части уравнения в куб:

$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2}\ \sqrt[3]{(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{(x-1)} + \sqrt[3]{(x-2)}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0, \\ x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$ тогда $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 0$, $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{x-2}$.

Возведём ещё раз в куб: $x-1 = -(x-2) \Rightarrow 2x-1-2 = 0;\ 2x = 3,\ x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = 1,5$.

4. Введение новой переменной.

Один из распространённых способов, используемый для решения иррациональных и других уравнений, — введение новой переменной. По этому способу определённое выражение, входящее в уравнение и содержащее неизвестное, для упрощения решения обозначают одной буквой, и сначала решают полученное уравнение относительно новой переменной.

Например, решение уравнения $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-6x+18} = 9$ значительно упрощается, если x^2-6x+9 обозначить, например, через y: $x^2-6x+9 = y \geq 0$. Тогда $x^2-6x+18 = y+9$, и данное уравнение приобретает вид $\sqrt{y} + \sqrt{y+9} = 9$. Решив его известным способом, получим $y = 16$. Вернёмся теперь к осуществлённой подстановке. Имеем: $x^2-6x+9 = 16;\ x^2-6x-7 = 0;\ x_1 = -1,\ x_2 = 7$.

Оба корня удовлетворяют начальному уравнению.

Иррациональные неравенства

Иррациональными называют неравенства, у которых переменная стоит под знаком радикала, причём рассматриваются только арифметические корни, если корень чётной степени.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод приведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. Но необходимо помнить.

1. Возведение обеих частей неравенства в нечётную степень с сохранением знака неравенства всегда является равносильным преобразованием.

2. Если обе части неравенства на некотором множестве X определены и имеют только положительные значения, то можно возвести обе части неравенства в квадрат или другую чётную степень с сохранением знака исходного неравенства, поскольку получим неравенство, равносильное исходному на множестве X.

3. *Для иррациональных неравенств вида* $\sqrt[2n]{f(x)} < q(x)$, где $q(x) < 0$, возводить в чётную степень обе части неравенства **нельзя.** Необходимо учитывать дополнительные условия.

Приведём методы решения простейших иррациональных неравенств:

1) $\sqrt[2n+1]{f(x)} < q(x) \Leftrightarrow f(x) < q^{2n+1}(x)$;

2) $\sqrt[2n+1]{f(x)} > q(x) \Leftrightarrow f(x) > q^{2n+1}(x)$;

3) $\sqrt[2n]{f(x)} < q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) < q^{2n}(x); \end{cases}$

4) $\sqrt[2n]{f(x)} > q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} q(x) \geq 0, \\ f(x) > q^{2n}(x). \end{cases} \end{array}\right.$

Примечание. Чтобы избежать ошибок при решении неравенств общего вида, необходимо прежде всего найти область определения исходного неравенства, а потом осуществлять равносильный переход на области определения или на её части.

1) $\sqrt{x-5} > 3$.

Решение.

$$\begin{cases} x-5 > 3^2; \\ x-5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 14 \\ x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow x > 14$$

Ответ: $(14;+\infty)$.

2) $\sqrt{x-5} > -3$.

Решение.

x — любое число из области определения, то есть:

$x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$.

Ответ: $[5;+\infty)$.

3) $\sqrt{x-5} < 3$.

Решение.

Необходимо учесть область определения.

$$\begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x-5 < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x < 14; \end{cases} \quad 5 \leq x < 14.$$

Ответ: $[5;14)$.

4) $\sqrt{x-5} < -3$.

Решение.

$\sqrt{x-5} \geq 0$ всегда, тогда неравенство решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

5. $\sqrt[3]{x-5} < -3$.

Решение.

$x - 5 < -27$

$x < -22$.

Ответ: $(-\infty;-22)$.

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

1. Решить уравнение.	$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0.$

Решение.

Найдём область определения уравнения: для этого предположим, что все подкоренные выражения больше или равны нулю:

$$\begin{cases} 11x+3\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \\ 9x-7\ge 0, \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{3}{11}, \\ x\le 2, \\ x\ge \frac{7}{9}, \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Значит, область определения состоит только из одной точки $x=2$. Проверим, будет ли это значение решением исходного уравнения:

$\sqrt{11\cdot 2+3}-\sqrt{2-2}-\sqrt{9\cdot 2+7}+\sqrt{2-2}=\sqrt{25}-\sqrt{25}=0.$

Как видим, $x=2$ — решение исходного уравнения.

Ответ:	2.
2. Решить уравнение.	$\sqrt{x-8}-\sqrt{5-x}=0.$

Решение.

Найдём область определения уравнения:

$$\begin{cases} x-8\ge 0, \\ 5-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 8, \\ x\le 5. \end{cases}$$

Значит, общих точек нет и исходное уравнение не имеет решения.

Ответ:	$\varnothing$.
3. Решить уравнение.	$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}=0.$

Решение.

Область определения уравнения $\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x\ge 5, \end{cases} \quad x\in[5;\infty).$

Если проанализировать уравнение, то два положительных выражения в сумме не могут равняться нулю, значит, корень $x\in\varnothing$.

Ответ:	$\varnothing$.
4. Решить уравнение.	$1-\sqrt{1+5x}=x.$

Решение.

Область определения уравнения $1+5x\ge 0\Rightarrow x\ge -\frac{1}{5}\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{5};\infty\right)$.

Уединим квадратный корень: $\sqrt{1+5x}=1-x$.

Допустим, что $1-x\ge 0\Rightarrow x\le 1$; тогда область определения такая: $x\in\left[-\frac{1}{5};1\right]$.

Возведём в квадрат обе части уравнения:

$1+5x=1-2x+x^2\Rightarrow x^2-7x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=7.$

Поскольку возводили в квадрат, то могут появиться посторонние корни, и поэтому надо сделать проверку или выбрать корни, принадлежащие области определения.

Проверка:

1) $x=0,\ 1-\sqrt{1}=0\Rightarrow x=0$ — корень;

2) $x=7,\ 1-\sqrt{1+35}\ne 7\Rightarrow x=7$ — не является корнем уравнения.

Ответ:	0.

5. Решить уравнение.	$\sqrt{x^2-3x+2}+x^2=4x-4$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-3x+2}=-(x-2)^2$.

Слева $\sqrt{x^2-2x+2}\ge 0$, справа — $(x-2)^2\le 0$. Очевидно, решение возможно только при $x=2$. Значение $x=2$ превращает уравнение в тождество.

Ответ:	2.

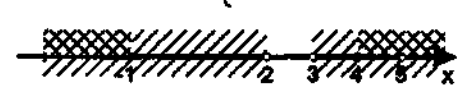
Решить уравнение.	$\sqrt{4-x}=x+2$.
1) Для решения иррациональных уравнений можно пользоваться методом рассуждений в общем виде. Например: $\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$ Заменим уравнение равносильной ему системой: $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \varphi(x)\ge 0 \\ f(x)=\varphi^{2n}(x) \end{cases}$ (1) 2) Решим систему (1):	$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x+2\ge 0, \\ 4-x=(x+2)^2; \end{cases}$ (1) $\begin{cases} x\le 4, \\ x\ge -2, \\ x^2+5x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\le x\le 4, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-5; \end{array}\right. \end{cases}$ $x=0$
Ответ:	0.

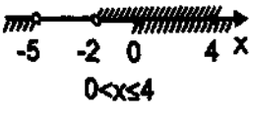
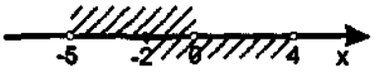
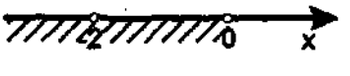
Решить уравнение.	$\sqrt{(x^2-5x+6)^2}=2-x$.
1) Пользуясь определением арифметического корня, запишем данное уравнение в виде $\lvert f(x)\rvert=\varphi(x)$: Данное уравнение равносильного совокупности двух систем: $\lvert f(x)\rvert=\varphi(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x)\ge 0, \\ f(x)=\varphi(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x)\ge 0, \\ f(x)=-\varphi(x) \end{cases} \end{array}\right.$	$\lvert x^2-5x+6\rvert=2-x$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ x^2-5x+6=2-x; \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ (x^2-5x+6)=x-2; \end{cases} \end{array}\right.\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 2, \\ (x-2)^2=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 2, \\ x^2-6x+8=0; \end{cases} \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.\Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.\Rightarrow x=2$
Ответ:	2.

Решить уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\varphi(x)}$.	$\sqrt{x^2-3x-4} = \sqrt{x^2-5x+6}$.
1. а) Если $n = 2k-1$, то данное уравнение запишем в виде $f(x) = y(x)$; б) если $n = 2k$, то данное уравнение заменим равносильной ему системой: $\begin{cases} f(x) \geq 0; \\ \varphi(x) \geq 0; \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases}$ 2. Решим уравнение (1) или систему (2).	В данном уравнении $n = 2$, поэтому имеем случай б): $\begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0; \\ x^2-5x+6 \geq 0; \\ x^2-3x-4 = x^2-5x+8. \end{cases}$ В данном случае удобно решить уравнение $f(x) = y(x)$ и выполнить проверку: $x^2-3x-4 = x^2-5x+6;\ x = 5$. Проверка: $\begin{cases} 5^2-3\cdot 5-4 \geq 0; \\ 5^2-5\cdot 5+6 \geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 6 \geq 0; \\ 6 \geq 0. \end{cases}$
Ответ:	5.
Решить уравнение.	$\sqrt{2x^2-8x+12} = x^2-4x-6$.
1) Введём новую переменную: 2) Найдём значение новой переменной, решив полученное уравнение (1): 3) Вернёмся к исходному неизвестному: 4) Решим полученные уравнения (2) и (3):	$\sqrt{2x^2-8x+12} = \frac{1}{2}(2x^2-8x+12)-12;$ $y = \sqrt{2x^2-8x+12};$ $y = \frac{1}{2}y^2-12;\ y^2-2y-24 = 0.$ $y_1 = 6;\ y_2 = -4;$ $\begin{cases} \sqrt{2x^2-8x+12} = 6; & (3) \\ (\sqrt{2x^2-8x+12} = -1) & (2), \end{cases}$ корней нет. $\sqrt{2x^2-8x+12} = 6;$ $\begin{cases} 2x^2-8x+12 \geq 0; \\ 2x^2-8x+12 = 36; \end{cases}$ $2x^2-8x+12 \geq 0$ всегда; $(D<0,\ a=2>0))$ $x^2-4x-12 = 0;$ $\begin{cases} x = 6; \\ x = -2. \end{cases}$
Ответ:	$-2;\ 6$.

Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} \gtrless g(x)$

Решить неравенство.	$\sqrt{(x^2-5x+6)^2} > 2-x.$
1) Пользуясь определением арифметического корня, запишем данное неравенство в виде $\lvert f(x)\rvert \gtrless g(x)$:	$\lvert x^2-5x+6\rvert > 2-x.$
2) Рассмотрим случай, когда выражение, стоящее под знаком модуля, неотрицательное: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \gtrless g(x) \end{cases}$ (1)	$\begin{cases} x^2-5x+6 \ge 0; \\ x^2-5x+6 > 2-x. \end{cases}$ (1)
3) Решим систему (1):	$\begin{cases} (x-2)(x-3) \ge 0; \\ x^2-4x+4 > 0. \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x \ge 3 \end{array}\right. ; \\ x \ne 2 \end{cases} \left[\begin{array}{l} x < 2. \\ x \ge 3. \end{array}\right.$
4) Рассмотрим случай, когда выражение, стоящее под знаком модуля, отрицательное: $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \gtrless g(x) \end{cases}$ (2)	$\begin{cases} x^2-5x+6 < 0; \\ -(x^2-5x+6) > 2-x. \end{cases}$ (2)
5) Решим систему (2):	$\begin{cases} (x-2)(x-3) < 0; \\ x^2-6x+8 < 0. \end{cases} \begin{cases} 2 < x < 3; \\ 2 < x < 4. \end{cases}$
6) Запишем ответ, объединив результаты, полученные в п.3 и п.5.	$x < 2$ или $x > 2$.
Ответ:	$(-\infty;2) \cup (2;\infty)$.

Решить неравенство.	$\sqrt{x^2-3x-4} < \sqrt{x^2-5x+6}.$
1. а) Если $n = 2k-1$, то данное неравенство (1) запишем в виде $f(x) \gtrless g(x)$; б) если $n = 2k$, то данное неравенство заменим равносильной ему системой: $\begin{cases} f(x) \ge 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < g(x). \end{cases}$ (1) $\quad \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) \ge 0; \\ f(x) > g(x). \end{cases}$ (2)	В данном примере $n = 2$, поэтому имеем случай б): $\begin{cases} x^2-3x-4 \ge 0; \\ x^2-5x+6 > 0; \\ x^2-3x-4 < x^2-5x+6. \end{cases}$ (2)
2. Решим неравенство (1) или (2).	$\begin{cases} (x-1)(x-4) \ge 0; \\ (x-2)(x-3) > 0; \\ 2x < 10. \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1; \\ x \ge 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 2; \\ x > 3; \end{array}\right. \\ x < 5. \end{cases}$
3. Запишем ответ:	 $x \le -1$ или $4 \le x < 5$.
Ответ:	$x \le -1$; $4 \le x \le 5$.

Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$	
Решить иррациональное неравенство.	$\sqrt{4-x} < x+2$.
1) Заменим неравенство равносильной системой: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$ (1) 2) Решим систему (1): 3) Запишем ответ:	$\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ 2+x > 0; \\ 4-x < (x+2)^2. \end{cases}$ (1) $\begin{cases} x \leq 4; \\ x > -2; \\ x^2+5x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x \leq 4; \\ x(x+5) > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x \leq 4; \\ \left[\begin{array}{l} x < -5; \\ x > 0; \end{array}\right. \end{cases}$  $0 < x \leq 4$
Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$	
Решить иррациональное неравенство.	$\sqrt{4-x} > x+2$.
1) Рассмотрим случай, когда $f(x) > 0$ и $g(x) \geq 0$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases}$ (1) 2) Решим систему (1): 3) Рассмотрим случай, когда $f(x) \geq 0$ и $g(x) < 0$: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ (2) 4) Решим систему (2): 5) Запишем ответы, объединив результаты, полученные в п.2 и п.4:	$\begin{cases} 4-x > 0; \\ x+2 \geq 0; \\ 4-x > (x+2)^2. \end{cases}$ (1) $\begin{cases} x < 4; \\ x \geq -2; \\ x^2+5x < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x < 4; \\ -5 < x < 0. \end{cases}$ $-2 < x < 0$  $\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ x+2 < 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \leq 4; \\ x < -2. \end{cases}$ $x < -2$ $\left[\begin{array}{l} -2 < x < 0; \\ x < -2. \end{array}\right.$ 
Ответ:	$(-\infty;-2) \cup (-2;0)$.

Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)}+b \gtrless bf(x)+c$

Решить иррациональное неравенство.	$\sqrt{2x^2-8x+12}<x^2-4x-6$.
1) Введём новую переменную:	$\sqrt{2x^2-8x+12}<\frac{1}{2}(2x^2-8x+12)-12$ $y=\sqrt{2x^2-8x+12}$; $y<\frac{1}{2}y^2-12$.
2) Найдём значение новой переменной, решив неравенство (1):	$y^2-2y-24>0$ (1) $y^2-2y-24>0$ $y<-4$, $y>6$.
3) Вернёмся к начальной неизвестной:	$\sqrt{2x^2-8x+12}<-4$ (2), решений нет.
4) Решим полученные неравенства (2), (3):	$\sqrt{2x^2-8x+12}>6$ (3). $\begin{cases}2x^2-8x+12\ge 0\\ 2x^2-8x-12>36\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-4x+6\ge 0\\ x^2-4x-12>0\end{cases}$ $x^2-4x+6\ge 0$ — всегда, $x^2-4x-12>0$; $x<-2$, $x>6$.
5) Запишем ответ:	$x<-2$ или $x>6$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

11. Решить уравнение.

а) $2\sqrt{3-x}=x-1$;

б) $\sqrt{2x-1}=x-2$;

в) $\sqrt{x+2}=x$;

г) $x+1=\sqrt{x+3}$;

д) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;

е) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{4-x}=x^2-6x+10$;

ж) $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$;

з) $\sqrt[10]{(x-2)^{10}}=\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$;

и) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$;

к) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x+12}$;

л) $\sqrt{3+x}=\sqrt{x^2-6x+8}$;

м) $\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{2x-6}$;

н) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$;

о) $\sqrt[4]{2x+4}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$;

п) $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}$;

р) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}+1$;

с) $\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{x+5}-3$;

т) $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-3}=4$.

12. Решить неравенство.

а) $2\sqrt{3-x}<x-1$;

б) $2\sqrt{3-x}>x-1$;

в) $\sqrt{2x-1}<x-2$;

г) $\sqrt{2x-1}>x-2$;

д) $x+1>\sqrt{x+3}$;

е) $x+1<\sqrt{x+3}$;

ж) $\sqrt{(x+1)^2}>x$;

з) $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$;

и) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$;

к) $\sqrt{x^2-x-12}<x$;

л) $\sqrt{x+1}<8-\sqrt{3x+1}$;

м) $\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-3}$;

н) $\sqrt{4-x}<x-2$;

о) $\frac{51-2x-x^2}{1-x}<1$;

п) $(x-3)^2+3x-22<\sqrt{x^2-3x+7}$;

р) $\frac{1}{2}\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x-4}<x+\sqrt{x^2-16}<6$;

с) $\sqrt{x}-\sqrt{6x+1}<\sqrt{2x+1}$;

т) $\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3}<x$;

у) $\sqrt{x^2-3x+6}\le 3x-4$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-4

Тема. Решение иррациональных уравнений

В-I	7 баллов	В-II
Решить уравнение.		
а) $\sqrt{x+1+\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x+19}$; в) $\sqrt{x+1} = 11-x$.		а) $\sqrt{x+2\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2x-9} = \sqrt{6-x}$; в) $\sqrt{12-x} = x$.
В-III	**9 баллов**	**В-IV**
Решить уравнение.		
а) $\sqrt{3x+4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+2$; б) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$; в) $x-5 = \sqrt{x+1}$.		а) $\sqrt{x+7+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8-5x} = \sqrt{x^2-16}$; в) $\sqrt{1+5x} = 1-x$.
В-V	**12 баллов**	**В-VI**
Решить уравнение.		
а) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$; б) $\sqrt{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$; в) $\sqrt{\lvert x-4\rvert} = x-4$.		а) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$; б) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\sqrt{\lvert x+1\rvert} = x+1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-4-5

Тема. Решение иррациональных уравнений и неравенств

В-I	7 баллов	В-II
1. Решить уравнение.		
а) $\sqrt{x+2} = 2+\sqrt{x+6}$; б) $\sqrt{x^2} = x+1$.		а) $2+\sqrt{x-7} = \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{(x+1)^2} = 2x+1$.
2. Решить неравенство.		
а) $\sqrt{x} > 2$; б) $\sqrt{4+2x} < 1,5$.		а) $\sqrt{x+3} > 2$; б) $\sqrt{2x+3} < 2$.
В-III	**9 баллов**	**В-IV**
1. Решить уравнение.		
а) $\sqrt{x+20} = 3+\sqrt{x-1}$; б) $\sqrt{(1-2x)^2} = 1-2x$.		а) $\sqrt{2x+5} = 1+\sqrt{x+6}$; б) $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$.
2. Решить неравенство.		
а) $\sqrt{6-2x} < \sqrt{5}$; б) $\sqrt{x-3} < 2$.		а) $\sqrt{2x-7} > 1$; б) $\sqrt{4x-1} < 3$.
В-V	**12 баллов**	**В-VI**
1. Решить уравнение.		
а) $(x^2+4x)\sqrt{x-3} = 0$.		а) $(x^2+x)\sqrt{x-1} = 0$.
2. Решить неравенство.		
а) $\sqrt{3x-9} < \sqrt{6-x}$; б) $\sqrt{1-2x} < x+1$; в) $\sqrt{1-2x} > x+1$.		а) $\sqrt{8+\sqrt{x^2+6x+10}} < 3$; б) $\sqrt{x-1} < 3-x$; в) $\sqrt{x-1} > 3-x$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-4-1

Тема. Корни n-ой степени. Иррациональные уравнения и неравенства

В-I	7 баллов	В-II
1. Выполнить действия.		
а) $\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6}-(0,125)^{-1}+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{0}$;		а) $2(-3)^{-2}+\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}+(-3)^{0}$;
б) $\left(\frac{1}{a-\sqrt{b}}+\frac{1}{a+\sqrt{b}}\right):\frac{a}{a^2-b}$.		б) $\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right):\sqrt{1-a^2}$.
2. Решить уравнение.		
$\sqrt{3x-5}=1-x$.		$\sqrt{10+\sqrt{x-5}}=3$.
3. Решить неравенство.		
$\sqrt{1-x}>2x-1$.		$\sqrt{1-x}<2x-1$.
В-III	**9 баллов**	**В-IV**
1. Выполнить действия.		
а) $\left(\left(6^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+(0,25)^{-1}\right)\cdot(-0,5)^3$;		а) $\left(\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{8}+\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right)^{-2}$;
б) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):\sqrt{a}$.		б) $\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+1\right):(1+\sqrt{1-x^2})$.
2. Решить уравнение.		
$\sqrt{x^2-x-12}=x$.		$\sqrt{x^2+4x+4}=x+6$.
3. Решить неравенство.		
$\sqrt{(2-x)^2}<2x-5$.		$\sqrt[6]{(2x-1)^6}>x+1$.
В-V	**12 баллов**	**В-VI.**
1. Упростить выражение.		
$\left(\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}+1\right):\frac{1}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})\sqrt{a+x}}$.		$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right):\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})\sqrt{a+x}}$.
2. Решить уравнение.		
а) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$;		а) $x\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x^3}=2$;
б) $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.		б) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.
3. Решить неравенство.		
а) $\sqrt[8]{(x-8)^8}<3x-1$;		а) $\sqrt[4]{(x^2-5x+6)^4}<2-x$;
б) $2x^2+3x+3<5\sqrt{2x^2+3x+9}$;		б) $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}>0$;
в) $\sqrt[3]{x^3+x^2-2x+1}<\sqrt[3]{x^3}$.		в) $\sqrt[5]{24x-2x^3}<\sqrt[5]{x^5}$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

Способы приведения иррациональных уравнений к рациональным

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$

Обе части возведём в степень $k = НСК\ (n, m)$ — наименьшее общее кратное чисел n и m.

1. Решить уравнение.	$\sqrt{2x+3} = 6-x.$

Решение.

1-й способ. Возведём обе части уравнения в квадрат.

$2x+3 = 36-12x+x^2$, $x^2-14x+33 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 11$. Сделаем проверку и убедимся, что $x = 11$ — посторонний корень, а $x = 3$ удовлетворяет уравнению.

2-й способ. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+3 \ge 0, \\ 6-x \ge 0, \\ (\sqrt{2x+3})^2 = (6-x)^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 11. \end{array}\right. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ:	3.

2. Решить уравнение.	$\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+3}.$

Решение.

Возводим обе части уравнения в степень $6 = НСК\ (2, 3)$.

$(x-1)^3 = (x+3)^2$, $x^3-4x^2-3x-10 = 0$. Подбором находим $x_1 = 5$. Дальше $x^3-4x^2-3x-10 = (x-5)(x^2+x+2)$. Уравнение $x^2+x+2 = 0$ корней не имеет. Проверкой убеждаемся, что $x = 5$ — корень заданного уравнения.

Ответ:	5.

Уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$ (или $= \sqrt{h(x)}$)

3. Решить уравнение.	$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4.$

Решение.

Возводим обе части уравнения в квадрат.

$x+2+3x-2+2\sqrt{(x+2)(3x-2)} = 16$, $\sqrt{3x^2+4x-4} = 8-2x$.

Снова возводим в квадрат $3x^2+4x-4 = 64-32x+4x^2$, $x^2-36x+68 = 0$. Находим $x_1 = 2$, $x_2 = 34$. Проверкой убеждаемся, что только значение $x = 2$ удовлетворяет исходному уравнению (для $x = 34$ при повторном возведении в квадрат было нарушено правило совпадения знаков).

Ответ:	2.

4. Решить уравнение.	$\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=\sqrt{x-1}$.

Решение.

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$5+x+5-x-2\sqrt{25-x^2}=x-1,\ \ 2\sqrt{25-x^2}=11-x,$

$4(25-x^2)=(11-x)^2,\ \ 5x^2-22x+21=0$. Имеем $x_1=3,\ \ x_2=1,4$.

Корень $x_1=3$ удовлетворяет исходному уравнению. Проверка корня $x_2=1,4$ затруднена. Но он удовлетворяет ОДЗ, и в процессе решения не было нарушено правило совпадения знаков обеих частей уравнения при возведении в квадрат.

Вывод: $x=1,4$ — тоже корень.

Ответ:	3; 1,4.

Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$ или $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$

При решении уравнений такого вида необходимо возвести обе части в куб по формуле $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})^3=a\pm b\pm 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})$ и для выражения, стоящего в правой части этой формулы в скобках, использовать условие исходного уравнения. Необходимо отметить, что иррациональное уравнение, возникающее при этом, не равносильно заданному. Оно следует из исходного уравнения, но исходное уравнение не всегда является следствием этого уравнения. Поэтому рациональное уравнение, которое появляется, может иметь посторонние корни, и проверка заданного иррационального уравнения обязательна.

5. Решить уравнение.	$\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$.

Решение.

После возведения обеих частей уравнения в куб получим:

$8-x+x+1+3\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1})=27$. По условию, $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$.

Имеем: $\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}=2$ или $x^2-7x=0$, откуда $x_1=0,\ \ x_2=7$. Проверкой убеждаемся, что оба корня превращают заданное уравнение в тождество.

Ответ:	0; 7.

6. Решить уравнение.	$\sqrt[3]{3x+24}-\sqrt[3]{2x+6}=\sqrt[3]{x}$.

Решение.

Возведение в куб обеих частей даёт:

$3x+24-2x-6-3\sqrt[3]{(3x+24)(2x+6)}(\sqrt[3]{3x+24}-\sqrt[3]{2x+6})=x$.

Используя заданное условие, после преобразований получаем:

$\sqrt[3]{(3x+24)(2x+6)x}=6$ или $x^3+11x^2+24x-36=0$. Выделяя в кубическом уравнении целые корни, находим $x_1=1,\ \ x_{2,3}=-6$. Проверкой исходного уравнения убеждаемся, что значение $x=-6$ является посторонним корнем.

Ответ:	1.

Метод введения новых переменных

7. Решить уравнение. $\sqrt[3]{4x+48}-\sqrt[3]{4x-17}=5$.

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{4x-17}=y$, тогда $4x=y^3+17$. Уравнение приобретает вид $\sqrt[3]{y^3+65}=5+y$, откуда $y^2+5y+4=0$. Корни этого уравнения $y_1=-1$, $y_2=-4$. Возвращаясь к подстановке, находим $x_1=4$, $x_2=-\frac{47}{4}$.

Ответ: $4;\ -\frac{47}{4}$.

Метод приведения иррационального уравнения к системе уравнений

8. Решить уравнение. $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$.

Решение.

Обозначим $\sqrt[3]{x+7}=a$, $\sqrt[3]{28-x}=b$, тогда, по условию, $a+b=5$. Кроме того, $a^3+b^3=x+7+28-x=35$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}a^3+b^3=35\\a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+b)^3-3ab(a+b)=35\\a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=6\\a+b=5\end{cases}$$

Находим два корня $a_1=2$, $b_1=3$; $a_2=3$, $b_2=2$. Возвращаясь к подстановке $x=a^3-7$ или $x=28-b^3$, получаем: $x_1=1$, $x_2=20$.

Ответ: 1; 20.

9. Решить уравнение. $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

Решение.

Пусть $8-x=a^4$ и $89+x=b^4$. Получаем систему уравнений: $\begin{cases}a+b=5\\a^4+b^4=97.\end{cases}$

Поскольку $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2$, то получим уравне-ние $(25-2ab)^2-2a^2b^2=97$, откуда $ab=6$ или $ab=44$, то есть $\begin{cases}a+b=5\\ab=6\end{cases}$ или $\begin{cases}a+b=5\\ab=44.\end{cases}$ Вторая система не совместима, первая система имеет два корня: $a=2$; $b=3$ или $a=3$; $b=2$. Итак, $x=-8$ или $x=-73$.

Ответ: $-8;\ -73$.

Метод выделения полного квадрата

Для использования этого метода надо знать формулы сокращённого умножения и формулу «сложного радикала».

10. Решить уравнение. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

Решение.

Сделаем подстановку $\sqrt{2x-5}=y\geq 0$.

тогда $x=\frac{y^2+5}{2}$, $x-2+\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+2y+1}{2}$, $x+2+3\sqrt{2x-5}=\frac{y^2+6y+9}{2}$.

В результате получаем: $\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2+6y+9}=14$, $|y+1|+|y+3|=14$.

При $y\geq 0$ имеем: $y+1+y+3=14$, $y=5$. Решив уравнение $\sqrt{2x-5}=5$, находим $x=15$.

Ответ: 15.

11. Решить уравнение. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решение.

Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

Имеем: $x+3-4\sqrt{x-1}=x-1-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2$;

$x+8-6\sqrt{x-1}=x-1-6\sqrt{x-1}+9=(\sqrt{x-1}-3)^2$.

Значит, заданное уравнение равносильно уравнению: $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$.

Решим его методом интервалов:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le x\le 5,\\ 2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1;\end{cases}\\ \begin{cases}5<x\le 10,\\ \sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 10,\\ \sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le x\le 5,\\ \sqrt{x-1}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}5<x\le 10,\\ 1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 10,\\ \sqrt{x-1}=3;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\\ 5<x\le 10,\\ x=10;\end{array}\right. \Rightarrow 5\le x\le 10.$$

Ответ: $5\le x\le 10$.

Иррациональные уравнения с параметрами

12. Решить уравнение. $\sqrt{x-a}=2x-1$, где a — параметр.

Решение.

Заданное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x-a\ge 0\\ 2x-1\ge 0\\ x-a=(2x-1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge a\\ x\ge\frac{1}{2}\\ 4x^2-5x+a+1=0.\end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $x_1=\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{9-16a}}{8}$ являются действительными числами при $a\le\frac{9}{16}$. При $a>\frac{9}{16}$ корней нет.

Учтём неравенства $x\ge a$ и $x\ge\frac{1}{2}$:

1) $x_1=\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}\ge\frac{1}{2}$, $\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}\ge a$, $\sqrt{9-16a}\ge 8a-5$.

Если $a\le\frac{9}{16}$, то $8a-5<0$ и неравенство $\sqrt{9-16a}\ge 8a-5$ верно для всех допустимых значений a. Значит, x_1 является корнем исходного уравнения при $a\le\frac{9}{16}$.

2) $x_2=\frac{5-\sqrt{9-16a}}{8}\ge\frac{1}{2}$, $\sqrt{9-16a}\le 1$, $a\ge\frac{1}{2}$ $\left(a\le\frac{9}{16}\right)$.

Если $\frac{1}{2}\le a\le\frac{9}{16}$, то $\frac{5-\sqrt{9-16a}}{8}\ge a$.

Итак, x_2 является корнем исходного уравнения при $\frac{1}{2}\le a\le\frac{9}{16}$.

Ответ: $\frac{5+\sqrt{9-16a}}{8}$, если $a<\frac{1}{2}$; $\frac{5-\sqrt{9-16a}}{8}$, если $\frac{1}{2}\le a\le\frac{9}{16}$; $\varnothing$, если $a>\frac{9}{16}$.

13. Решить уравнение. $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=a$, где a — параметр.

Решение.

Очевидно, $a>0$. Обозначим $\sqrt{x-1}=b$, $\sqrt{5-x}=c$. Тогда приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} b+c=a \\ b^2+c^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=a \\ (b+c)^2-2bc=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=a \\ bc=\dfrac{a^2-4}{2}. \end{cases}$$

Так как $a>0$ и по смыслу $b\ge 0$, $c\ge 0$, то необходимо $a\ge 2$.
Из последней системы находим:

$$b_1=\frac{a+\sqrt{8-a^2}}{2},\quad b_2=\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2};$$

$$c_1=\frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2},\quad c_2=\frac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}.$$

Очевидно, допустимое множество значений параметра a имеет вид $2\le a\le\sqrt{8}$.
Возвращаясь к подстановке $x=b^2+1$ или $x=5-c^2$, определяем корни уравнения. Имеем при $2\le a\le\sqrt{8}$:

$$x_{1,2}=1+\left(\frac{a\pm\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2 \text{ или } x_{1,2}=3\pm\frac{a}{2}\sqrt{8-a^2}.$$

Подставляя значения x_1 (или x_2) в исходное уравнение, можно получить тождество:

$$\sqrt{2+\frac{a}{2}\sqrt{8-a^2}}+\sqrt{2-\frac{a}{2}\sqrt{8-a^2}}=a,\quad 2\le a\le\sqrt{8}.$$

Ответ: $3\pm\frac{a}{2}\sqrt{8-a^2}$, если $2\le a\le\sqrt{8}$; $\varnothing$, если $a<2$ или $a>\sqrt{8}$.

Иррациональные неравенства

Напомним, что решение иррациональных неравенств сводится к решению равносильной совокупности систем рациональных уравнений.

Если $\sqrt{f(x)}<q(x)$, то $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ q(x)>0 \\ f(x)<(q(x))^2. \end{cases}$

Если $\sqrt{f(x)}>q(x)$, то $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ q(x)\ge 0 \\ f(x)>(q(x))^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ q(x)<0. \end{cases}$

14. Решить неравенство.	$\sqrt{x^2-5x+4}>2x-8$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-8<0;\\ x^2-5x+4\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}2x-8\geq 0;\\ x^2-5x+4\geq 0;\\ x^2-5x+4>(2x-8)^2.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<4;\\ x\leq 1,\ x\geq 4;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 4;\\ x\leq 1,\ x\geq 4;\\ x^2-9x+20<0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 1;\\ \begin{cases}x\geq 4;\\ 4<x<5.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 1;\\ 4<x<5.\end{array}\right.$$

Ответ:	$(-\infty;1]\cup(4;5)$.

15. Решить неравенство.	$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}\leq\sqrt{6-x}$.

Решение.

1) Запишем неравенство в виде: $\sqrt{2x-1}\leq\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$.

2) Учитывая область определения, имеем равносильное неравенство:

$2x-1\leq x-1+2\sqrt{(x-1)(6-x)}+6-x$,

$\sqrt{(x-1)(6-x)}\geq x-3$.

3) Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\leq 0;\\ (x-1)(6-x)\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\geq 0;\\ (x-1)(6-x)\geq 0;\\ (x-1)(6-x)\geq (x-3)^2.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 3;\\ 1\leq x\leq 6;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 3;\\ 1\leq x\leq 6;\\ 2x^2-13x+15\leq 0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}1\leq x\leq 3;\\ \begin{cases}3\leq x\leq 6;\\ \frac{3}{2}\leq x\leq 5;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow 1\leq x\leq 5.$$

Ответ:	$[1;5]$.

16. Решить неравенство.	$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geq 3$.

Решение.

1) Введём новую переменную: $\sqrt{x-4}=y\geq 0$, тогда $x=y^2+4$.

2) Неравенство принимает вид: $\sqrt{y^2+4y+4}-\sqrt{y^2-4y+4}\geq 3$. $|y+2|-|y-2|\geq 3$.

При $y\geq 2$, имеем $y+2-y+2\geq 3$; $4\geq 3$.

Неравенство верно для всех $y\geq 2$;

При $0\leq y<2$, $y+2-2+y\geq 3$; $y\geq\frac{3}{2}$.

При $\frac{3}{2}\leq y<2$ неравенство верно, значит, $|y+2|-|y-2|\geq 3$ верно при $y\geq\frac{3}{2}$.

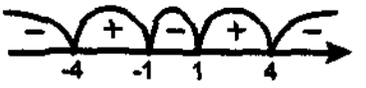
Вернёмся к переменной x: $\sqrt{x-4}\geq\frac{3}{2}$ или $x\geq\frac{25}{4}$.

Ответ:	$\left[\frac{25}{4};+\infty\right)$.

17. Решить неравенство.	$\frac{8+2x}{x+1}+\frac{x-4}{x-1}>\sqrt{\frac{16-x^2}{x^2-1}}$.

Решение.

Находим ОДЗ для функции, стоящей под знаком корня:



$\left[\begin{array}{l}-4\le x<-1\\1<x\le 4\end{array}\right.$

Рассмотрим каждый из полученных промежутков отдельно.

1) $1<x\le 4$. На этом промежутке $\frac{8+2x}{x+1}>0,\ \frac{4-x}{x-1}\ge 0$.

Пусть $\sqrt{\frac{4+x}{x+1}}=a,\ \sqrt{\frac{4-x}{x-1}}=b$.

Тогда исходное неравенство принимает вид $2a^2-b^2-ab>0$.

Так как $a\ne 0$, то разделим неравенство на a^2. Получим $z^2+z-2<0$, где $z=\frac{b}{a}\ge 0$.

Решая полученное неравенство, находим $-2<z<1$. Приходим к двойному неравенству $0\le\sqrt{\frac{4-x}{x-1}\cdot\frac{x+1}{4+x}}<1$, которое на промежутке $1<x\le 4$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}1<x\le 4;\\ \frac{(4-x)(x+1)}{(x-1)(4+x)}<1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<x\le 4;\\ \frac{x^2-4}{(x-1)(x+4)}>0.\end{cases}$$

Решением последней системы является множество $2<x\le 4$.

2) $-4\le x<-1$. На этом промежутке $\frac{8+2x}{x+1}\le 0,\ \frac{x-4}{x-1}>0$.

Пусть $\sqrt{-\frac{4+x}{x+1}}=a,\ \sqrt{\frac{x-4}{x-1}}=b$.

Тогда исходное неравенство принимает вид $-2a^2+b^2-ab>0$. Так как $b\ne 0$, то разделим неравенство на b^2. Имеем: $2z^2+z-1<0$, где $z=\frac{a}{b}\ge 0$. Находим $-1<z<\frac{1}{2}$.

Полученное двойное неравенство $0\le\sqrt{\frac{4+x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{4-x}}<\frac{1}{2}$ на промежутке $-4\le x<-1$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}-4\le x<-1;\\ \frac{(4+x)}{(x+1)}\cdot\frac{(x-1)}{(4-x)}<\frac{1}{4},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\le x<-1;\\ \frac{5x^2+9x-20}{(x+1)(x-4)}>0.\end{cases}$$

Решением последней системы является множество $\left[-4;\frac{-9-\sqrt{481}}{10}\right)$.

Ответ:	$\left[-4;\frac{-9-\sqrt{481}}{10}\right)\cup(2;4]$.

Иррациональные неравенства с параметром

18. Решить неравенство. $\sqrt{a^2+x^2} > x+a-1$, где a — параметр.

Решение.

При любом значении a, если правая часть $x+a-1<0$, то есть $x<1-a$, заданное неравенство верно. При $x \geq 1-a$ равносильная система неравенств имеет вид:

$$\begin{cases} x \geq 1-a \\ a^2+x^2 > (x+a-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1-a \\ x(2a-2) < 2a-1. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) $a>1$, тогда $1-a \leq x < \frac{2a-1}{2a-2}$. Объединяя с множеством $x<1-a$, получаем $x<\frac{2a-1}{2a-2}$.

2) $a=1$. $x \geq 0$ — решение системы (1). Объединяя со множеством $x<1-a$ $(a=1)$, находим: x — любое число.

3) $a<1$. Решение системы (1) $x \geq 1-a$. Присоединив $x<1-a$, имеем: x — любое число.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{2a-1}{2a-2}\right)$, если $a>1$; $(-\infty;+\infty)$, если $a \leq 1$.

19. Решить неравенство. $x-a > \sqrt{x+a^2}$, где a — параметр.

Решение.

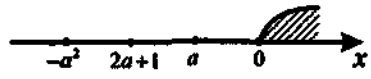
Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+a^2 \geq 0, \\ x-a>0, \\ (x-a)^2 > x+a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -a^2, \\ x>a, \\ x(x-2a-1)>0. \end{cases}$$

Определим расположение на числовой оси точек $-a^2$, a, $2a+1$ и 0 в зависимости от значения параметра a. Некоторые из этих точек могут совпадать при $a=-1$; $-\frac{1}{2}$ и 0.

Поэтому необходимо исследовать четыре промежутка.

1) Пусть $a \leq -1$. Тогда нетрудно установить, что расположение точек такое:



$x>0$

Решением системы (1) является множество $x>0$.

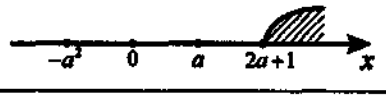
2) Пусть $-1<a \leq -\frac{1}{2}$. Тогда:

$\left[\begin{array}{l} -a^2 \leq x < 2a+1; \\ x>0. \end{array}\right.$

3) Пусть $-\frac{1}{2}<a<0$. Тогда:

$\begin{cases} -a^2 \leq x < 0; \\ x > 2a+1. \end{cases}$

4) Пусть $a \geq 0$. Тогда:



$x > 2a+1$.

Ответ: $(0;+\infty)$, если $a \leq -1$; $[-a^2;2a+1) \cup (0;+\infty)$,

если $-1<a \leq -\frac{1}{2}$; $[-a^2;0) \cup (2a+1;+\infty)$, если $-\frac{1}{2}<a<0$; $(2a+1;+\infty)$, если $a \geq 0$.

20. Построить график функции. $y = \sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-1}$.

1) Найдём область определения функции: $D(y) = [1;+\infty)$.

2) Преобразуем подкоренное выражение:

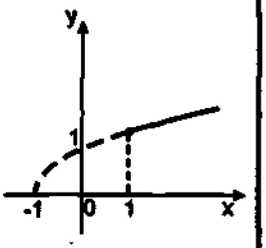
$y = \sqrt{x-1-2\sqrt{x^2-1}+x+1} + \sqrt{x-1}$

$y = \left|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right| + \sqrt{x-1}$

Если $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$, то $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$, $y = \sqrt{x+1}$

3) Построим график функции:

$\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ x \geq 1. \end{cases}$



21. Построить график функции. $y = \dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} - \sqrt{x+\frac{1}{x}-2}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} + \sqrt{x+\frac{1}{x}-2.}}$

1) Область определения функции: $D(y) = (0;+\infty)$.

2) Упростим выражение, задающее функцию:

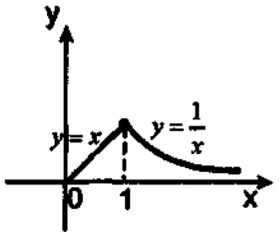
$y = \dfrac{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}; y = \dfrac{\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}{\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}};$

при $0 < x \leq 1$: $y = \dfrac{x+1-(1-x)}{x+1+(1-x)}; y = \dfrac{2x}{2}; y = x.$

при $x > 1$: $y = \dfrac{x+1-x+1}{x+1+x-1}; y = \dfrac{2}{2x}; y = \dfrac{1}{x}.$

3) Построим график:

$\begin{cases} y = x, & \text{если } x \in (0;1] \\ y = \dfrac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$



ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Решить уравнение.

а) $\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{2x-6}$;

б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

г) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$;

д) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$;

е) $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$;

ж) $\sqrt{x+2-\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+5}=2$;

з) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$;

и) $\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}$;

к) $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$;

л) $\sqrt{4-x^2}-2x=|2-x|$;

м) $\sqrt{2x^2-3x+1}=|x+1|-x$.

2. При каких значениях параметра уравнение имеет один корень?

а) $\sqrt{a-x}=2-x$; б) $\sqrt{2-x}=a-x$; в) $\sqrt{x+a}=x+1$.

3. Решить уравнение, где a — параметр.

а) $\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$; б) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

4. Решить неравенство.

а) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$;

б) $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x}>1$;

в) $\sqrt[3]{5+x}-2\cdot\sqrt[3]{5-x}>\sqrt[6]{25-x^2}$;

г) $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\le x$;

д) $\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0$;

е) $\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15}\le|3x-6|$;

ж) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$;

з) $\sqrt{4+4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$;

и) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

к) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le 2$;

л) $\sqrt{x+a}>x+1$;

м) $\sqrt{1-x^2}>a-x$.

5. Построить график функции.

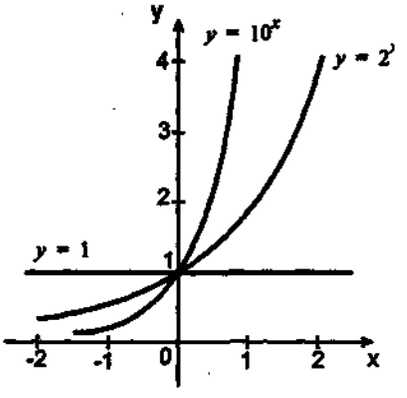
а) $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}+3$; б) $y=\sqrt{x^6-2x^3+1}$; в) $y=(\sqrt{2x+1})^2-x$.

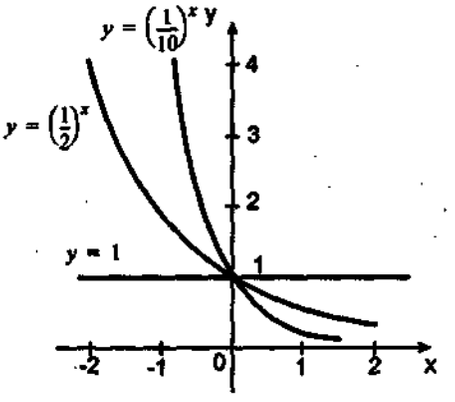
§5. Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства

Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где x – переменная, a – некоторое число, причем $a > 0$; $a \neq 1$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...





Свойства

Свойства	Функция $y = a^x$.	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
1) Область определения $D(y)$.	$x \in R$, $D(y) = R$.	$x \in R$; $D(y) = R$.
2) Множество значений $E(y)$.	$y > 0$; $E(y) = (0;+\infty)$.	$y > 0$; $E(y) = (0;+\infty)$.
	Показательная функция приобретает только положительные значения $a^x > 0$ всегда! График не пересекает ось Ox.	
3) Значения y для $x = 0$.	$x = 0$; $y = 1$.	$x = 0$; $y = 1$.
	График пересекает ось Oy в точке $(0;1)$.	
4) Значения y для $x > 0$.	$x > 0$; $y > 1$. $a^x > 1$, при $x > 0$.	$x > 0$; $0 < y < 1$. $0 < a^x < 1$, при $x > 0$.
5) Значения y для $x < 0$.	$x < 0$; $0 < y < 1$. $0 < a^x < 1$, при $x < 0$.	$x < 0$; $y > 1$. $a^x > 1$, при $x < 0$.
6) Монотонность.	Возрастает на всей числовой прямой (большему показателю соответствует большая степень).	Убывает на всей числовой прямой (большему показателю соответствует меньшая степень).
Следствие. Если две степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и их показатели. Если $a^b = a^c$, то $b = c$.		

Основные показательные тождества

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;	$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$;
$a^{x-y} = a^x : a^y$;	$3^{1-x} = \frac{3}{3^x}$;
$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$;	$5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$; $\left(\frac{9}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$;
$a^x \cdot b^x = (ab)^x$;	$2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x$;
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$; $b \neq 0$;	$\frac{4^x}{7^x} = \left(\frac{4}{7}\right)^x$;
$a^0 = 1$; $a \neq 0$;	$1 = 7^0$;
$a^1 = a$; ; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$;	$\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$;
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $a > 0$;	$\sqrt[x]{5^{x-3}} = 5^{\frac{x-3}{x}}$.

Показательные уравнения и неравенства

Уравнения (неравенства), в которых неизвестное входит в показатель степени, называются **показательными.**

Например: $2^{x-3} = 32$; $5^{x^2-1} > 1$.

Простейшие показательные уравнения (неравенства) — это уравнения (неравенства) вида: $a^x = b$; $a^x > b$; $a^x < b$; $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$.

Решение простейших показательных уравнений (неравенств)

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$	$\Leftrightarrow$	$f(x) = g(x)$	приравниваем показатели при разных основаниях
$a > 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\Leftrightarrow$	$f(x) > g(x)$	знак неравенства не изменяется
$0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\Leftrightarrow$	$f(x) < g(x)$	знак неравенства изменяется на противоположный

Общего способа решения таких уравнений (неравенств) не существует. Рассмотрим некоторые типы и способы решения показательных уравнений (неравенств).

I. Простейшие и те, которые приводятся к ним следующим путём:

а) приведение к одному основанию;

б) вынесение общего множителя за скобки;

в) деление обеих частей на степень.

II. Показательные уравнения (неравенства), приводимые к алгебраическим:

а) приведение к квадратному путём замены;

б) однородные.

III. «Нестандартные» показательные уравнения (неравенства).

УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Построение графиков показательных функций

1. Построить график функции $y = -2^x$.

Решение.

Сначала построим график функции $y = 2^x$, потом симметрично отобразим его относительно оси Oy.

График функции $y = -2^x$ на рис.1.

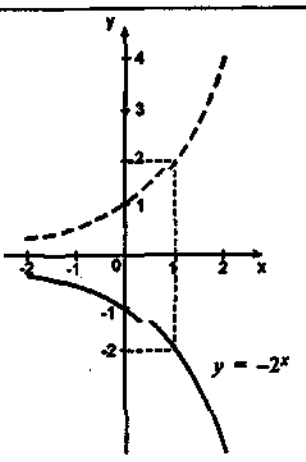


Рис.1.

2. Построить график функции $y = 2^{|x|}$.

Решение.

Для $x \geq 0$ строим график $y = 2^x$.

Симметрично отображаем его относительно оси Oy.

Объединение этих графиков и будет искомым графиком.

График функции $y = 2^{|x|}$ на рис.2.

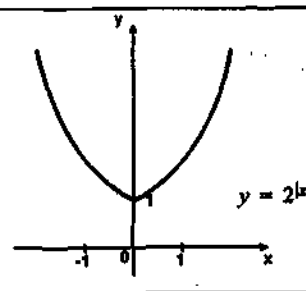


Рис.2.

3. Построить график функции $y = 3^{|x-1|}$.

Решение.

Пусть $x - 1 \geq 0$, тогда $y = 3^{|x-1|} = 3^{x-1} = 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x$. График функции $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ при $x \geq 1$ изображён на рис.3.

Пусть $x - 1 \leq 0$, тогда $y = 3^{|x-1|} = 3^{-(x-1)} = 3^{-x+1} = 3 \cdot \frac{1}{3^x} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Здесь $a = \frac{1}{3} < 1$.

График функции $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ при $x \leq 1$ изображён на рис.4

(при $x = 0$ $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3$). График функции $y = 3^{|x-1|}$ изображён на рис.5.

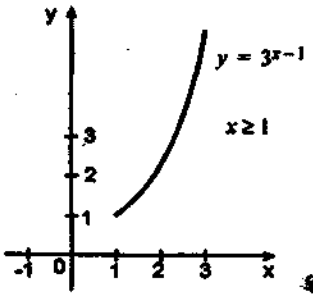


Рис.3.

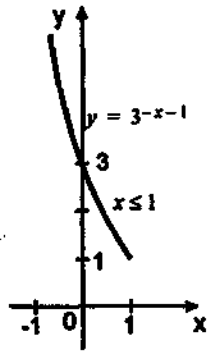


Рис.4.

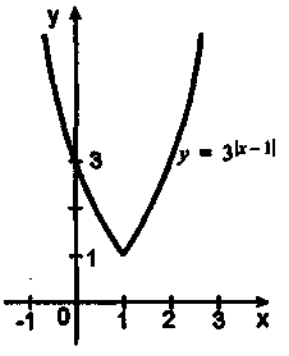


Рис.5.

Решение показательных уравнений

1. Решить уравнение.	$7^{x-1}=49$.	$7^{x-1}=1$.	$7^{x-1}=-7$.	$7^{x-1}=0$.	$7^x=14$.
Решение.	$7^{x-1}=7^2$; $x-1=2$; $x=3$.	$7^{x-1}=7^0$; $x-1=0$; $x=1$.	Функция $y=7^t$ приобретает только положительные значения, поэтому уравнение не имеет корней.		$x=\log_7 14$.
Ответ:	$x=3$.	$x=1$.	$x\in\varnothing$.		$x=\log_7 14$.

2. Решить неравенство.	$5^{x+1}>125$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}<\frac{1}{8}$	$4^x>0$	$4^x>-2$	$4^x<0$	$4^x<-2$
Решение.	$5^{x+1}>5^3$ $5>1$ $y=5^t$ — возрастающая функция. $x+1>3$ $x>2$.	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $0<\frac{1}{2}<1$ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ — убывающая функция. $x-3>3$; $x>6$.	$4^x>0$ для всех $x\in R$. x — любое число.		неравенство не имеет решений, поскольку $4^t>0$ для всех $x\in R$.	
Ответ:	$(2;+\infty)$.	$(6;+\infty)$.	$x\in R$.		$x\in\varnothing$.	

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путём приведения к общему основанию

1. Решить уравнение.	$\frac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot(0,04)^x$.
Решение.	
Приведём обе части уравнения к основанию 5: $0,2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=5^{-1}$; $\sqrt{5}=5^{1/2}=5^{0,5}$; $0,04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=5^{-2}$.	$\frac{(5^{-1})^{x+0,5}}{5^{\frac{1}{2}}}=5^1\cdot(5^{-2})^x$; $5^{-x-0,5-0,5}=5^{1-2x}$; $5^{-x-1}=5^{1-2x}$.
Уравняем показатели степеней при разных основаниях:	$-x-1=1-2x$.
Решим полученное уравнение:	$-x+2x=1+1$; $x=2$.
Запишем ответ.	Ответ: 2.

2. Решить неравенство.	$2\cdot 4^{2x-2}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{3x-1}$.
Решение.	
Приведём обе части неравенства к общему основанию:	$2^1\cdot(2^2)^{2x-2}\ge(2^{-3})^{3x-1}$; $2^1\cdot 2^{4x-4}\ge 2^{-9x+3}$; $2^{1+4x-4}\ge 2^{-9x+3}$; $2^{4x-3}\ge 2^{-9x+3}$.
Установим, является ли функция с данным основанием возрастающей или убывающей:	$2>1$; $y=2^t$ — возрастающая.
Учитывая монотонность функции с данным основанием, составим неравенство из показателей степеней:	$4x-3\ge-9x+3$.
Решим полученное неравенство:	$13x\ge 6$; $x\ge\frac{6}{13}$.
Запишем ответ.	Ответ: $\left[\frac{6}{13};+\infty\right)$.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путём вынесения общего множителя за скобки

Показательные уравнения (неравенства) вида

$A_0 \cdot a^{mx+k_0} + A_1 \cdot a^{mx+k_1} + \ldots + A_n \cdot a^{mx+k_n} = M$

$A_0 \cdot a^{mx+k_0} + A_1 \cdot a^{mx+k_1} + \ldots + A_n \cdot a^{mx+k_n} \gtrless M$

приводятся к простейшим путём вынесения за скобки общего множителя a^{mx+k_i}, где k_i — наименьшее из чисел $k_0,\ k_1,\ k_2 \ldots k_n$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся неизменным, а показатели — вычитаются.

$$\frac{2^{x-5}}{2^{x-8}} = 2^{x-5-(x-8)} = 2^{x-5-x+8} = 2^3 = 8.$$

1. Решить уравнение.	$2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20.$
Решение.	
Вынесем за скобки общий множитель (множитель с наименьшим из наличных показателей):	$2^{3\sqrt{x}-1}(2^{3\sqrt{x}-(3\sqrt{x}-1)} + 3) = 20;$ $2^{3\sqrt{x}-1}(2+3) = 20.$
Выполним действия в скобках:	$2^{3\sqrt{x}-1} \cdot 5 = 20.$
Разделим левую и правую части уравнения на выражение в скобках:	$2^{3\sqrt{x}-1} = 4.$
Приведём к одному основанию:	$2^{3\sqrt{x}-1} = 2^2.$
Уравняем показатели и решим полученное уравнение:	$3\sqrt{x} - 1 = 2;$ $3\sqrt{x} = 3;$ $\sqrt{x} = 1;$ $x = 1.$
Запишем ответ.	Ответ: 1.

2. Решить неравенство.	$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{x+2} \le 236.$
Решение.	
Вынесем общий множитель за скобки:	$4^x(3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) \le 236.$
Выполним действие в скобках:	$4^x \cdot 59 \le 236.$
Разделим левую и правую части неравенства на 59:	$4^x \le 4.$
Решим полученное неравенство (помня о монотонности функции с данным основанием):	$4 > 1,\ \ y = 4^x$ — возрастающая. $x \le 1.$
Запишем ответ.	Ответ: $(-\infty; 1]$.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путем деления левой и правой частей на одну из степеней

Показательные уравнения (неравенства) вида $a^{nx} = b^{nx}$ $a^{nx} \gtrless b^{nx}$ $(a \neq b)$ приводятся к простейшим путём деления обеих частей на b^{nx} или a^{nx} $(b^{nx} \neq 0;\ a^{nx} \neq 0)$.

1. Решить уравнение.	$2^{x-2} = 3^{x-2}$.
Решение.	
Разделим обе части уравнения на $3^{x-2} \neq 0$:	$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} = 1$.
Приведём обе части к одному основанию, используя свойства: $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$; $a^0 = 1$;	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^0$.
Приравняем показатели и решим полученное уравнение:	$x-2 = 0$; $x = 2$.
Запишем ответ:	Ответ: 2.
2. Решить неравенство.	$5^{x-3} < 7^{3-x}$.
Решение.	
Домножим обе части неравенства на $7^{x-3} > 0$:	$5^{x-3} \cdot 7^{x-3} < 7^{3-x} \cdot 7^{x-3}$.
Приведём к одному основанию: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$, $a^0 = 1$.	$(5 \cdot 7)^{x-3} < 7^{3-x+x-3}$; $35^{x-3} < 7^0$; $35^{x-3} < 1$; $35^{x-3} < 35^0$.
Решим показательное неравенство:	$35 > 1$, $y = 35^t$ — возрастающая. $x-3 < 0$; $x < 3$.
Запишем ответ.	Ответ: $(-\infty;3)$.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к квадратным путём введения новой переменной

Показательные уравнения (неравенства) вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ $(Aa^{2x} + Ba^x + C \gtrless 0)$ приводятся к квадратным путём замены $a^x = t$, $t > 0$ (показательная функция приобретает только положительные значения).

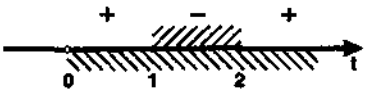
Справедливы следующие свойства степеней:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

Решить уравнение.	$3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.
	Решение.
Выполнив тождественные преобразования, приведём уравнение к квадратному:	$3^{2x+4+1} = 3^{x+2} + 2$; $3^{2x+4} \cdot 3 = 3^{x+2} + 2$;
Сделаем замену:	Замена $3^{x+2} = t$, $t > 0$ тогда $3^{2x+4} = t^2$.
Решим полученное квадратное уравнение относительно t:	$3t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{2}{3}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.
Вернёмся к замене и решим показательное уравнение:	$3^{x+2} = 1$; $x + 2 = 0$; $x = -2$.
Запишем ответ.	Ответ: -2.

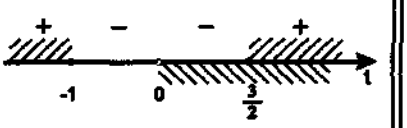
Решить неравенство.	$2^x + 2^{1-x} \le 3$.
	Решение.
Преобразуем левую часть неравенства:	$2^x + \frac{2}{2^x} \le 3$.
Сделаем замену:	$2^x = t$; $t > 0$.
Решим полученное неравенство, учитывая, что $t > 0$:	$\begin{cases} t + \frac{2}{t} \le 3; \\ t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 \le 0; \\ t > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (t-1)(t-2) \le 0; \\ t > 0, \end{cases}$  $1 \le t \le 2$.
Вернемся к замене и решим показательное неравенство:	$1 \le 2^x \le 2$; $2^0 \le 2^x \le 2^1$; $2 > 1$; $y = 2^x$ — возрастающая. $0 \le x \le 1$.
Запишем ответ.	Ответ: $[0;1]$.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к квадратным путём почленного деления на одну из степеней

Показательные уравнения (неравенства) вида $Aa^{2x}+B(a\cdot b)^x+C\cdot b^{2x}=0$ ($Aa^{2x}+B(a\cdot b)^x+C\cdot b^{2x}\gtrless 0$) являются однородными. Решаются такие уравнения (неравенства) почленным делением, как правило, или на $a^{2x}\neq 0$, или на $b^{2x}\neq 0$ ($a^{2x}>0;\ b^{2x}>0$).

Решить уравнение.	$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$
Решение.	
Запишем уравнение так:	$3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}-5\cdot(4\cdot 9)^x=0.$
Разделим обе части уравнения на $4^{2x}\neq 0$: $\frac{9^{2x}}{4^{2x}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}$; $\frac{(4\cdot 9)^x}{4^{2x}}=\frac{4^x\cdot 9^x}{4^x\cdot 4^x}=\left(\frac{9}{4}\right)^x.$	$3+2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x=0.$
Сделаем замену:	$\left(\frac{9}{4}\right)^x=t;\ t>0.$
Решим полученное квадратное уравнение:	$2t^2-5t+3=0;$ $\left[\begin{array}{l} t=1;\\ t=\frac{3}{2}.\end{array}\right.$
Вернёмся к замене и решим совокупность показательных уравнений:	$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{9}{4}\right)^x=1;\\ \left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{3}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{9}{4}\right)^x=\left(\frac{9}{4}\right)^0;\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$
Запишем ответ.	Ответ: $0;\ \frac{1}{2}.$

Решить неравенство.	$2\cdot 4^x\geq 6^x+3\cdot 9^x.$
Решение.	
Запишем неравенство в виде:	$2\cdot 2^{2x}\geq 2^x\cdot 3^x+3\cdot 3^{2x}.$
Разделим обе части неравенства на $3^{2x}>0$:	$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^x+3.$
Сделаем замену:	$\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,\ t>0.$

Решим полученное неравенство, учитывая, что $t>0$:	$\begin{cases} t>0; \\ 2t^2-t-3\geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 2\left(t-\frac{3}{2}\right)(t+1)\geq 0; \\ t>0. \end{cases}$  $t\geq\frac{3}{2}$.
Вернёмся к замене и решим показательное неравенство:	$\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\frac{3}{2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $0<\frac{2}{3}<1$; $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ — убывающая функция. $x\leq -1$.
Запишем ответ.	Ответ: $(-\infty;-1]$.

Преобразование уравнения к виду $f(x)=g(x)$, где в одной части — возрастающая функция, в другой — убывающая.

У такого уравнения если есть корень, то он единственный. Единственный корень можно найти подбором, или доказать, что уравнение не имеет решений.

Решить уравнение.	$2^x+5^x=7^x$.
Решение.	
Разделим обе части уравнения на $7^x\neq 0$:	$\left(\frac{2}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x=1$.
Функция $y=\left(\frac{2}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x$ — убывающая; $y=1$ — постоянная. Графики этих функций пересекаются не более чем в одной точке.	$x=1$ — единственный корень.
Запишем ответ.	Ответ: 1.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить в виде степени с основанием 2.

$8;\ \frac{1}{4};\ 1;\ 0{,}125;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ \sqrt{2};\ \frac{1}{32}$.

2. Записать в виде степени с дробным показателем.

$\sqrt[3]{5^2};\ \sqrt[4]{2^x};\ \sqrt{5^{x-1}};\ \sqrt{x}$.

3. Записать в виде произведения, частного степеней; степени, возведённой в степень.

$4^{x+3};\ 2^{5-x};\ 3^{4x};\ 7^{2x-5};\ 5^{3x+3}$.

4. Записать в виде степени с основанием 2.

$4^x;\ 8^x;\ 8^{2x};\ \sqrt[5]{2^{7x}};\ \frac{2^{2x+1}}{2^{2x-5}};\ 4^x\cdot 2^{x+3};\ \sqrt{32^x};\ \sqrt{0{,}25^x};\ (4^{x-1})^{\frac{x}{2}};\ \frac{2}{2^{\sin^2 x}}$.

5. Записать в виде степени с основанием 3.

$\frac{1}{3};\ 1;\ \sqrt{3^x};\ 9^x;\ \frac{1}{27^{x+2}};\ 81^{5x+1};\ \frac{3^{2x+3}}{3^{x-2}};\ \frac{3^{\cos^2 x}}{3}$.

6. Записать число 1 в виде степени с основанием 5; 10; $\frac{1}{2}$.

7. Записать в виде степени с показателем -1.

$\frac{5}{6}$; $1\frac{2}{3}$; 18; 2^x.

8. Записать в виде степени с отрицательным показателем.

$\frac{1}{5^3}$; $\frac{1}{3^6}$; $\frac{1}{2^{7x}}$.

9. Вычислить удобным способом.

$15^2 \cdot 4^2$; $6^3 \cdot 5^3$; $\frac{30^5}{15^5}$; $\frac{45^2}{5^2}$.

10. Какие из перечисленных функций являются показательными?

а) $y = \pi^x$; б) $y = x^2$; г) $y = (-3)^x$; д) $y = 3^{-x}$; е) $y = (\sqrt{2})^x$; ж) $y = a^{\sin x}$.

11. Найти область определения функции.

а) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y = 5^{\sin x}$; г) $y = 3^{\frac{1}{\cos x}}$; д) $y = a^{\frac{2}{tgx}}$.

12. Найти множество значений функции.

а) $y = \frac{1}{2^x}$; б) $y = \frac{1}{2^{|x|}}$; в) $y = 2^{\cos x}$; г) $y = 4^x + 5$; д) $y = 10^x - 3$; е) $y = 2^{\sqrt{x}}$.

13. Построить график функции.

а) $y = 3^x$; б) $y = 3^{x+1}$; в) $y = 3^{x-2}$; г) $y = 3^x - 2$; д) $y = 3^{|x|}$;

е) $y = 3^{-x}$; ж) $y = 3^{-x+1}$; з) $y = \frac{1}{3}^{|x|}$; и) $y = |3^x - 5|$; к) $y = (\sin 90°)^x$.

14. Сравнить с единицей.

а) 2^{-5}; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; в) $(\sin 30°)^{10}$; г) $\left(tg\frac{\pi}{3}\right)^4$; д) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\pi}$; е) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}$.

15. Записать числа в порядке возрастания.

а) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{\frac{4}{\sqrt{4}}}$; $3^{\sqrt{5}}$; $3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{2}}$.

16. Сравнить показатели m и n, если:

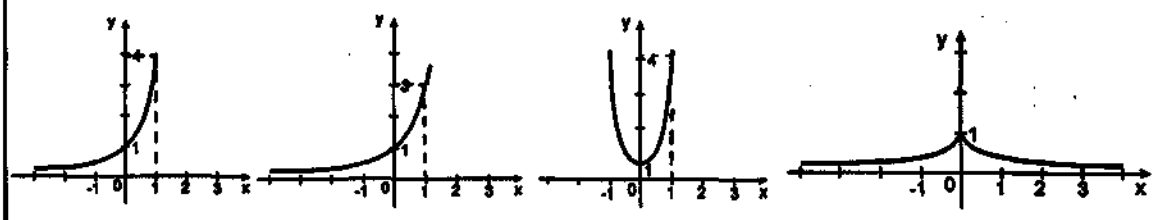
а) $\left(\frac{4}{5}\right)^m < \left(\frac{4}{5}\right)^n$; б) $(1,5)^m < (1,5)^n$; в) $(0,3)^m > (0,3)^n$;

г) $(\sin 20°)^m > (\sin 20°)^n$; д) $(\cos 1)^m < (\cos 1)^n$.

17. Равносильны ли неравенства?

а) $a^x > a^4$ и $x > 4$; б) $5^{x^2} < 5^x$ и $x^2 < x$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ и $2x < x - 1$?

18. График какой функции изображён на рисунке?



а) б) в) г)

19. Решить неравенство.

а) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} < \left(\frac{4}{5}\right)^{x-3}$; б) $(1,5)^{x^2} > (1,5)^{5x-6}$; в) $(0,3)^{\frac{x+2}{x-1}} \geq (0,3)^{\frac{2}{x-1}}$;

г) $7^x > 0$; д) $(\sqrt{3})^x > -2$; е) $5^{\sin x} > 1$;

ж) $6^{\cos x} < \sqrt{6}$; з) $\left(\frac{8}{3}\right)^{1+\frac{2}{x}} \leq \left(\frac{8}{3}\right)^x$; и) $10^{\sqrt{x}} > 0$;

к) $2^x < -3$; л) $3^{ctgx} > \frac{1}{3}$.

20. Сравнить с единицей основание a, если:

а) $a^3 > a^4$; б) $a^{1,8} < a^{0,6}$; г) $a^6 > a^2$.

21. Найти наибольшее и наименьшее значения функций.

а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{|x|}$; в) $y = 4^{\cos x}$; г) $y = 5^{\cos x} - 2$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}$.

22. Решить графически уравнения и неравенства.

а) $3^x = 4 - x$; б) $3^x > 4 - x$; в) $3^x < 4 - x$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > x + 3$;

е) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq x + 3$; ж) $4^x = 5 - x$; з) $4^x \leq 5 - x$; и) $4^x \geq 5 - x$.

23. Решить уравнение способом приведения к одному основанию.

а) $49^x = \frac{1}{7}$; б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$; в) $(0,125)^x = 128$; г) $2^{x-1} = 1$;

д) $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$; е) $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$; ж) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; з) $1000^x\sqrt{0,1} = 100^x$;

и) $2^{\cos 2x} = \sqrt{2}$; к) $5^{-\frac{1}{2}\sin 2x} = 25 \cdot 125^{-\sin^2 2x}$; л) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 512$;

м) $3^{|x^2-3x+2|} = 9^{x+1}$; н) $5^{4\sqrt{x-3}-x} = 1$; о) $\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{2x-1}}$.

24. Решить неравенство.

а) $2^{5x+6} > \frac{1}{2^{-x}}$; б) $4^{x+1} > 32$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}$; г) $0,4^{x^2-x-20} > 1$;

д) $2^{9x-x^3} < 1$; е) $(0,3)^{x^2} < (0,3)^{5x+6}$; ж) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-x} < 0,16$; з) $(0,7)^{\frac{x^2+2x-3}{x}} \geq 1$;

и) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-4} \geq 4$; к) $(0,5)^{\frac{x^2-x-2}{x}} \leq 1$; л) $2^{\sqrt{x-4}} > 8$; м) $(0,2)^{|x+5|} < \frac{1}{125}$;

н) $(0,2)^{2-\frac{x-3}{x+2}} < (0,2)^{\frac{x-2}{x+1}}$.

25. Данные показательные уравнения и неравенства решить способом вынесения общего множителя за скобки.

а) $2^{x+2}-2^x=96$; б) $2^x-2^{x-2}=3$; в) $2^{x-1}+2^{x-2}=448-2^{x-3}$;

г) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-4^{x-\frac{1}{2}}$; е) $3^{A+1}-3^{A-1}=\frac{8}{3}$, где $A=\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x$;

д) $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$;

ж) $3^x+3^{x+2}<30$; з) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\le 112$; и) $7^{x-1}-5\cdot 7^{x-2}\le 2^x-2^{x-1}$

к) $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}\le 0$; л) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$; м) $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}-1}\ge 56$.

26. Решить показательные уравнения и неравенства приведением их к виду $a^{2x}+a^x=b$; $a^{2x}+a^x\gtrless b$.

а) $2^{2x}+2\cdot 2^x=80$; б) $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$; в) $2^{2x+1}+2^{x+2}=16$;

г) $9^{\sqrt{x^2+1}}-4\cdot 3^{\sqrt{x^2+1}+1}+27=0$; д) $5^x-0{,}2^x=4{,}8$; е) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=2$;

ж) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$; з) $4^x+2^{x+1}=80$; к) $3^{\frac{1}{x}}-4\cdot 3^{\frac{1}{2x}}+3=0$;

и) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=34$;

л) $25^x-5^x-20<0$; м) $9^x+2\cdot 3^x-15>0$; н) $8-16^x<2^{2x}+1$;

о) $4^x-2^{x+1}\ge 3$; п) $2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}}<24$; р) $4^x-6\cdot 2^x+8<0$.

27. Решить однородные показательные уравнения и неравенства.

а) $6^x+9^x=2^{2x+1}$; б) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$; в) $3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x$;

г) $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x=5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$; д) $9^A+6^A=2\cdot 4^A$, где $A=\sin x+2\sin 3x+\sin 5x$;

е) $64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x=0$;

ж) $5\cdot 25^x+2\cdot 15^x\le 3\cdot 9^x$; з) $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x>7\cdot 10^x$; и) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0$.

28. Решить показательные уравнения и неравенства.

а) $11^x=17^x$; б) $3\cdot 2^x=2\cdot 3^x$; в) $3^{x-1}=5^{1-x}$;

г) $3^{2x+1}\cdot 5^{x-1}=5^{2x+1}\cdot 3^{x-1}$; д) $11^{x-7}<17^{7-x}$; е) $3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}$;

ж) $2^x\cdot 5^x>0{,}1(10^{x-1})^5$; з) $2^{x^2+2x}\cdot 3^{x^2+2x}<216^{x+2}$; и) $6^A+6^{A+1}=2^A+2^{A+1}+2^{A+2}$, где $A=\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\cdot\sin 3x$.

29. Решить уравнение.

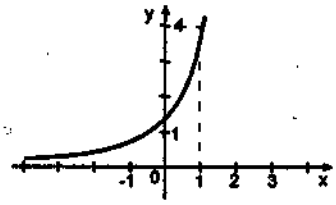
а) $3^x+4^x=5^x$; б) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x$; в) $3^{x-2}=\frac{9}{x}$;

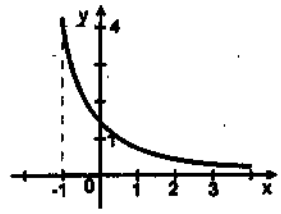
г) $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x$; д) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=2x-1$; е) $2^x+3^x+4^x+5^x=54$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-5-1

В-I	7 баллов	В-II

1. График какой функции изображён на рисунке?





Указать: а) область определения данной функции;
б) множество значений;
в) промежутки возрастания, убывания;
г) наибольшее, наименьшее значения функции.

2. Сравнить числа.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{6}}$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{6}+7}$; $5^{1,2}$ и $5^{0,6}$.

$2^{\sqrt{2}}$ и $2^{\sqrt{3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

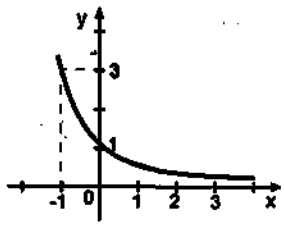
3. Решить графически уравнение.

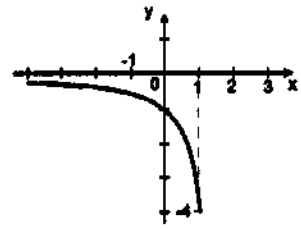
$5-x=4^x$.

$3^x=2x+5$.

В-III	9 баллов	В-IV

1. График какой функции изображён на рисунке?





Указать: а) область определения данной функции;
б) множество значений;
в) промежутки возрастания, убывания;
г) наибольшее, наименьшее значения функции.

2. Сравнить числа.

$\left(tg\frac{\pi}{3}\right)^{-10}$ и $\left(tg\frac{\pi}{3}\right)^{-12}$; $(\pi)^{-\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$.

$\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^{-1,5}$ и $\left(sin\frac{\pi}{6}\right)^{-2}$; $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{-1-\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2}$.

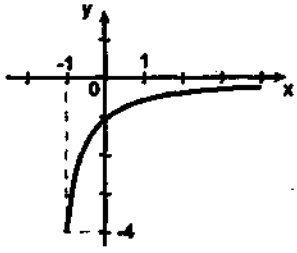
3. Решить уравнение графически.

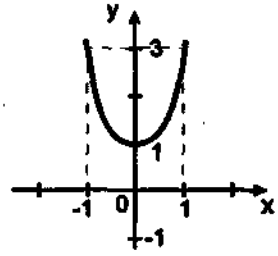
$\left(\frac{1}{4}\right)^x=2x+1$.

$0,5^x=x+1$.

B-V	12 баллов	B-VI

1. График какой функции изображён на рисунке?





Указать: а) область определения данной функции;
б) множество значений;
в) промежутки возрастания, убывания;
г) наибольшее, наименьшее значения функции.

2. Сравнить числа.

$\left(ctg\frac{4\pi}{3}\right)^{10}$ и $ctg\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{13}$; $(1,2)^{-\sqrt{7}}$ и 1.

$\left(\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3}}\right)^{\sqrt{3}+1}$ и $\left(\frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3}}\right)^{2}$; $(\sqrt{3})^{3,5}$ и 1.

3. Решить уравнение графически.

$2^{\sqrt{x^2}} = \cos x$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \frac{4}{1-x}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-5-2

B-I	7 баллов	B-II	B-III	9 баллов	B-IV

1. Решить уравнение.

$3^x = \frac{1}{81}$; $3^x + 3^{x+1} = 108$; $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.	$5^x = \frac{1}{125}$; $7^x - 7^{x-1} = 6$; $9^x - 3^x - 6 = 0$.	$0,25^{x-1} = 8$; $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} =$ $= 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$ $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$.	$2^{x+2} = \sqrt{0,5}$; $6^x + 6^{x+1} - 2^x =$ $= 2^{x+1} + 2^{x+2}$; $9^{x-1} + 3^{x+2} - 90 = 0$.

2. Решить неравенство.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{-6x}$.	$2^{x-x^2} \geq \frac{1}{4}$.	$\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \geq 9^{4x}$.	$\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geq 8^{3x}$.

B-V	12 баллов	B-VI

1. Решить уравнение.

$2^{\lvert x-1\rvert} = 0,5^{1-x}$; $9^x - 4^{x-\frac{1}{2}} = 4^{x+1} - 3^{2x-1}$; $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 2,5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$.	$5^{\lvert x+1\rvert} = (0,2)^{x-1}$; $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} = 52$; $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$.

2. Решить неравенство.

$2^{\frac{x^2+4}{x}} \leq 32$.	$0,5^{\frac{x^2-4}{x}} \geq 0,125$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-5-1

Решить уравнения и неравенства.

В-I — 7 баллов

а) $5^{2-3x} = \frac{1}{25}$; б) $49^{2x} > \frac{1}{7}$;

в) $(0,2)^{2x^2-x} < 1$; г) $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 < 0$;

д) $2 \cdot 2^{2x} - 5 : 6^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$;

е) $21^{x^2-2x} = 5^{x^2-2x}$;

ж) $3^{2\cos 2x+1} = 1$.

В-II — 7 баллов

а) $4^{1-2x} = \frac{1}{16}$; б) $64^x < \frac{1}{8}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x^2-3} > 1$; г) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 < 0$;

д) $4 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 2^{2x} = 5 \cdot 6^x$;

е) $2^{x^2+4x} = 3^{x^2+4x}$;

ж) $7^{2\sin x+\sqrt{3}} = 1$.

В-III — 9 баллов

а) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{5^x} = 100$; б) $36^x < \frac{1}{6}$;

в) $(0,5)^{x-x^2} > 1$; г) $5^{2x+1} - 6 \cdot 5^x + 1 \geq 0$;

д) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

е) $2^{x-2} = 3^{2-x}$;

ж) $(3,5)^{4\sin x\cos x+\sqrt{3}} = 1$.

В-IV — 9 баллов

а) $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^x} = 36$; б) $25^x > \frac{1}{5}$;

в) $(0,3)^{x^2-x} < 1$; г) $4^{2x+3} - 20 \cdot 4^x + 1 \geq 0$;

д) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

е) $3^{x-4} = 5^{4-x}$;

ж) $8^{\sin^2 x-\cos^2 x-0,5} = 1$.

В-V — 12 баллов

а) $\left(\frac{1}{64}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-1} \geq 9^{x-1}$;

в) $(0,25)^{\frac{x^2-4}{x}} > 1$; г) $4^x - 4^{1-x} < 3$;

д) $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6\frac{1}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$;

е) При каких значениях a уравнение $4^x - (a+1) \cdot 2^x + 2a - 2 = 0$ имеет только один корень?

В-VI — 12 баллов

а) $3^{\frac{1}{2}(x-5)} = 3\sqrt{3}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-7} \leq 4^{x+2}$;

в) $(0,36)^{\frac{x}{x^2-9}} < 1$; г) $5^x - 5^{1-x} > 4$;

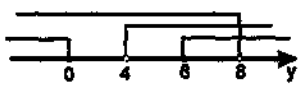
д) $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

е) При каких значениях a уравнение $9^x - a \cdot 3^x + 3a - 9 = 0$ имеет только один корень?

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

1. Решить уравнение.	$2^x + 2^{-x} = 2\cos 2x$.
Решение.	
Оценим левую и правую части уравнения:	$2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$; $2\cos 2x \leq 2$.
Заменим уравнение равносильной системой:	$\begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^x} = 2; \\ 2\cos 2x = 2. \end{cases}$
Решим первое уравнение системы:	$2^x = y$; $y + \frac{1}{y} = 2$; $y^2 - 2y + 1 = 0$; $y = 1$; $2^x = 1$; $x = 0$.
Проверим, удовлетворяет ли корень $x = 0$ второму уравнению системы:	$2\cos 2 \cdot 0 = 2$; $2 \cdot 1 = 2$.
Значит, $x = 0$ — решение системы, значит и данного уравнения.	
Ответ:	$x = 0$.
2. Решить уравнение.	$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$.
Решение.	
Сделаем замену:	$2^x = y$.
Уравнение приобретёт вид:	$3y^2 + (3x - 10)y + 3 - x = 0$.
Решим полученное уравнение как квадратное относительно y:	$y = \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{(3x-10)^2 - 12(3-x)}}{6} =$ $= \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} =$ $= \frac{-3x + 10 \pm (3x - 8)}{6}$ $y_1 = 3 - x$ или $y = \frac{1}{3}$.
Вернемся к замене:	$2^x = 3 - x$ левая часть уравнения — возрастающая функция, правая — убывающая; $x = 1$ — единственный корень. $2^x = \frac{1}{3}$; $x = \log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3$.
Ответ:	1; $-\log_2 3$.

3. Решить уравнение.	$(x+1)^{x^2+x-4} = (x+1)^2$.
Решение.	
Это уравнение показательно-степенное. Для нахождения его корней надо рассмотреть четыре случая. 1) $x+1 = 1$ (основание равно 1), откуда $x = 0$. Проверка $1^{-4} = 1^2$; $1 = 1$ $x = 0$ — корень. 2) $x+1 = -1$ (основание равно -1), откуда $x = -2$; $(-1)^{-2} = (-1)^2$ $x = -2$ — корень. 3) $x+1 = 0$ (основание равно 0), откуда $x = -1$. Выражение 0^{-4} не имеет смысла, $x = -1$ не является корнем. 4) $x^2+x-4 = 2$ (показатели равны), $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Проверкой убеждаемся, что 2; -3 — корни данного уравнения.	
Ответ:	$-3;\ -2;\ 0;\ 2$.
4. Решить неравенство.	$(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.
Решение.	
Данное неравенство равносильно совокупности двух систем. Решим каждую из систем.	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>1;\\x^2-6x+8>0.\end{cases}\\\begin{cases}0<x-2<1;\\x^2-6x+8<0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3;\\(x-2)(x-4)>0.\end{cases}\\\begin{cases}2<x<3;\\(x-2)(x-4)<0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3;\\\left[\begin{array}{l}x>4;\\x<2.\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}2<x<3;\\2<x<4.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>4;\\2<x<3.\end{array}\right. \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (2;3) \cup (4;\ +\infty)$.
Ответ:	$(2;3) \cup (4;+\infty)$.

5. Решить неравенство.	$\sqrt{4^x - 6\cdot 2^x} < 2^x - 4$.
Решение.	
Сделаем замену $2^x = y$.	$\sqrt{y^2 - 6y} < y - 4$.
Данное неравенство равносильно системе неравенств:	$\begin{cases} y-4>0; \\ y^2-6y\ge 0; \\ y^2-6y<(y-4)^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>4; \\ y(y-6)\ge 0; \\ y^2-6y<y^2-8y+16. \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y>4; \\ y(y-6)\ge 0; \\ 2y<16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>4; \\ \left[\begin{array}{l} y\le 0; \\ y\ge 6; \end{array}\right. \\ y<8. \end{cases}$  $6 \le y < 8$.
Вернемся к замене:	$6 \le 2^x < 8$, $2 > 1$; $y = 2^x$ — возрастающая функция $\log_2 6 \le x < 3$.
Ответ:	$[\log_2 6; 3)$.
6. Решить неравенство.	$3^x + 4^x \ge 5^x$.
Решение.	
Разделим обе части неравенства на $5^x > 0$:	$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ge 1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 \ge 0$.
Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, которая определена для всех $x \in R$ и убывающая:	$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0$.
Найдем корень уравнения $f(x) = 0$:	$x = 2$ — единственный корень уравнения.
$f(x)$ — убывающая функция, поэтому,	если $x < 2$, то $f(x) > f(2) = 0$, если $x > 2$, то $f(x) < f(2) = 0$.
Ответ:	$(-\infty; 2]$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Решить уравнение.

а) $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,75+11,375+\ldots$;

б) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$;

в) $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x$;

г) $2^{2x}-(x+4)\cdot 2^x+4x=0$;

д) $(3+\sqrt{8})^x+(3-\sqrt{8})^x=6$;

е) $2^{3x}-\frac{1}{2^{3x-6}}-21\left(2^x-\frac{1}{2^{x-2}}\right)=0$;

ж) $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$;

з) $9^{\cos^2 x}+3^{\cos 2x}=12\cdot 9^{\sin x\cdot\cos x}$;

и) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\sin^2 x}+3\cdot 4^{\cos 2x-1}=4^{\sin 2x-1}$;

к) $4^{tg^2 x}+8=3\cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

2. Решить уравнение.

а) $(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}$;

б) $6^x\sqrt{9}+6^x\sqrt{4}-13^x\sqrt{6}=0$;

в) $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$;

г) $4^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-4}}=6$;

д) $4^x-4^{\sqrt{x}+1}=3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}$;

е) $3^x+3^{-x}=2^{1-\sqrt{x^2-x}}$;

ж) $1+2^{tgx}=3\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$;

з) $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=(0,04)^{-28}$;

и) $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{x-1}+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$;

к) $5^{2A}\cdot 5^{-1}+5^A\cdot 5=250$; $A=3-\sin^4 x-\cos^4 x$.

3. Решить неравенство.

а) $(x^2-8x+15)^{x-6}<1$; б) $\sqrt{39-3^x}>9-3^x$;

в) $\frac{3^x+2x-11}{x-1}<2$; г) $\frac{3^{x-1}+11}{3^x+1}<3$;

д) $5^{\sqrt{2-x}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{2-\sqrt{2+x}}$; е) $|2^{x^2-1}-4|>4$;

ж) $5^x+12^x\le 13^x$; з) $3^{1+\sqrt{x+1}}+3^{2-\sqrt{x+1}}\ge 28$.

§ 6. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.

Обозначается $\log_a b$.	Читается: логарифм b по основанию a.

$a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$

показательное равенство $a^x = b$	$\Leftrightarrow$	логарифмическое равенство $x = \log_a b$
x — показатель степени; a — основание степени; b — степень числа a.		x — логарифм числа b по основанию a; a — основание логарифма; b — число, стоящее под знаком логарифма.

Примеры:

$2^5 = 32 \Leftrightarrow 5 = \log_2 32;$

$\log_2 \frac{1}{16} = -4 \Leftrightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16}.$

$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4;$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125.$

	Вычислить:
$a^{\log_a b} = b,\ a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0.$ основное логарифмическое тождество.	$2^{\log_2 7} = 7.$
	$2^{-\log_2 7} = \frac{1}{2^{\log_2 7}} = \frac{1}{7};$
	$4^{\log_2 7} = 2^{2\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^2 = 7^2 = 49;$
	$2^{1+\log_2 7} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 7} = 2 \cdot 7 = 14.$
Логарифмы по основанию 10 называются десятичными и обозначаются lg $10^{\lg b} = b.$	$\lg 10 = 1$
	$\lg 100 = 2$
	$\lg 1000 = 3$
	$\lg 0,1 = -1$
	$\lg 0,01 = -2$
	$\lg 0,001 = -3$

Свойства логарифмов	Примеры
1) $\log_b b = 1$, так как $b^1 = b$. Логарифм числа по тому же основанию равен 1.	$\log_4 4 = 1$; $\log_7 7 = 1$; $\log_{\frac{1}{3}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.
2) $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$. Логарифм единицы по любому основанию равен 0.	$\log_9 1 = 0$; $\log_5 x = 0 \Rightarrow x = 1$.
3) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad c > 0, \quad b > 0$ Логарифм произведения равен сумме логарифмов.	$lg15 = lg(3 \cdot 5) = lg3 + lg5$; $lg20 + lg5 = lg(20 \cdot 5) = lg100 = 2$.
4) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \quad b > 0, \quad c > 0$ Логарифм дроби (частного) равен разности логарифмов числителя и знаменателя.	$\log_3 \frac{3}{5} = \log_3 3 - \log_3 5 = 1 - \log_3 5$; $\log_3 8 - \log_3 \frac{8}{27} = \log_3\left(8 : \frac{8}{27}\right) = \log_3 27 = 3$.
5) $\log_a b^n = n\log_a b, \quad b > 0$ Логарифм степени равен произведению показателя и логарифма основания. $\log_{a^n}\sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b, \quad b > 0$	$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$; $lg8 = lg2^3 = 3lg2$; $lg\sqrt[5]{49} = lg7^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}lg7$; $3lgb = lgb^3$.
6) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$ $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$	$\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$; $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 2\log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется **логарифмированием.**	
Прологарифмировать выражения по произвольному основанию a.	
Используем правило: логарифм произведения:	1) $x = 3abc$; $\log_a x = \log_a 3 + \log_a b + \log_a c$.
Логарифм произведения и частного:	2) $x = \frac{ab}{3}$; $\log_a x = \log_a a + \log_a b - \log_a 3$.
Логарифм произведения и степени:	3) $x = 2m^8 \cdot k^6$; $\log x = \log_a 2 + 8\log_a m + 6\log_a k$.

Нахождение чисел (выражений) по данному логарифму числа (выражения) называется **потенцированием.**

Пропотенциировать выражение и найти x.

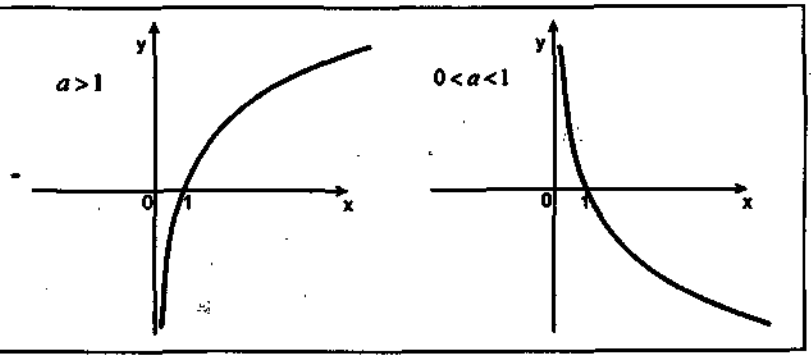
Сумму логарифмов заменим логарифмом произведения:	а) $lgx = lg2 + lga + lgc$; $lgx = lg(2 \cdot a \cdot c)$; $x = 2ac$.
Запишем правило, обратное логарифму частного и степени:	б) $lgx = 2lga - 5lgb$; $x = \frac{a^2}{b^5}$.

Логарифмическая функция — это функция вида $y = \log_a x$, $a > 0$; $a \neq 1$.

$y = \log_a x$

$a > 0$

$a \neq 1$



Свойства

1. Область определения: $D(y) = (0;+\infty)$.
Выражение, которое логарифмируется — положительное. График не пересекает ось Oy.

2. Множество значений: $E(y) = R$.

3. При $x = 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ приобретает значение, равное 1.
График пересекает ось Ox в точке $(1;0)$.

4. $a > 1$

$y = \log_a x$ — возрастающая; большему числу соответствует больший логарифм;

Если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$; если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

Логарифмы чисел, больших 1, положительны. Логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны.

$0 < a < 1$

$y = \log_a x$ — убывающая; большему числу соответствует меньший логарифм;

Если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$; если $x > 1$, то $\log_a x < 0$.

Логарифмы чисел, больших 1, отрицательны. Логарифмы чисел, меньших 1, положительны.

Следствие. Из равенства логарифмов по одному основанию двух чисел следует равенство самих чисел $\boxed{\log_a x = \log_a y} \Rightarrow \boxed{x = y}$ $a > 0$; $a \neq 1$.

Логарифмические уравнения

Логарифмическими называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Например: $\log_2(3x-2) = 4$.

Решение логарифмических уравнений основывается на определении логарифма, свойствах логарифмической функции и свойствах логарифма.

Основные методы решения логарифмических уравнений

1) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad a>0;\ a\neq 1$.

2) $\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)^b = g(x) \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

3) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

4) $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) = h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

5) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(f(x)g(x)) = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

6) $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

7) $n\log_a f(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a f(x)^n = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$$

$$\log_a(f(x))^{2n} = 2n\log_a|f(x)|$$

Логарифмические неравенства

Неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма, называются **логарифмическими**.

Например: $\log_2(x^2-3x+2)>1$.

При решении логарифмических неравенств помни:

1) общие свойства неравенств;
2) свойство монотонности логарифмической функции;
3) область определения логарифмической функции.

Основные методы решения логарифмических неравенств

1) $\begin{matrix}\log_a f(x)>b\\ a>1\end{matrix} \Leftrightarrow f(x)>a^b$

2) $\begin{matrix}\log_a f(x)>b\\ 0<a<1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<a^b\\ f(x)>0\end{cases}$

3) $\begin{matrix}\log_a f(x)<b\\ a>1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<a^b\\ f(x)>0\end{cases}$

4) $\begin{matrix}\log_a f(x)<b\\ 0<a<1\end{matrix} \Leftrightarrow f(x)>a^b$

5) $\log_{g(x)} f(x)>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1\\ f(x)>g(x)^b\end{cases}\\ \begin{cases}0<g(x)<1\\ f(x)<g(x)^b\\ f(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

6) $\log_{g(x)} f(x)<b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1\\ f(x)<g(x)^b\\ f(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<g(x)<1\\ f(x)>g(x)^b\end{cases}\end{array}\right.$

7) $\begin{matrix}a>1\\ \log_a f(x)>\log_a h(x)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>h(x)\\ h(x)>0\end{cases}$

8) $\begin{matrix}0<a<1\\ \log_a f(x)>\log_a h(x)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<h(x)\\ f(x)>0\end{cases}$

9) $\begin{matrix}a>1\\ \log_a f(x)<\log_a h(x)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<h(x)\\ f(x)>0\end{cases}$

10) $\begin{matrix}0<a<1\\ \log_a f(x)<\log_a h(x)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>h(x)\\ h(x)>0\end{cases}$

11) $\log_{g(x)} f(x)<\log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1\\ f(x)<h(x)\\ f(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<g(x)<1\\ f(x)>g(x)\\ g(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

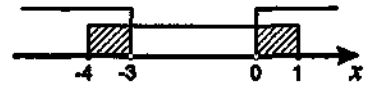
12) $\log_{g(x)} f(x)>\log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>1\\ f(x)>h(x)\\ h(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<g(x)<1\\ f(x)<h(x)\\ f(x)>0\end{cases}\end{array}\right.$

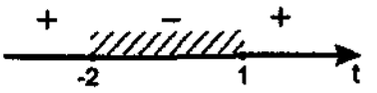
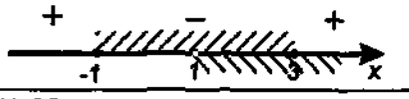
УЧЕНИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА	
1. Найти.	$\log_4 8$.
Решение.	
Обозначим $\log_4 8$ через x:	$\log_4 8 = x$.
Перейдём к показательному равенству:	$4^x = 8$.
Приведём к основанию 2 и решим показательное уравнение:	$2^{2x} = 2^3$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$.
Ответ:	$\log_4 8 = \frac{3}{2}$.
2. Решить уравнение.	$\log_{27} x = \frac{2}{3}$.
Решение.	
Запишем показательное равенство и выполним вычисления:	$27^{\frac{2}{3}} = x$; $(3^3)^{\frac{2}{3}} = x$; $3^2 = x$; $9 = x$.
Ответ:	$x = 9$.
3. Найти x.	$\log_x 125 = \frac{3}{2}$.
Решение.	
По определению логарифма имеем:	$x^{\frac{3}{2}} = 125$.
Возведём обе части в степень $\frac{2}{3}$:	$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}}$; $x = (5^3)^{\frac{2}{3}}$; $x = 5^2 = 25$.
Ответ:	$x = 25$.
4. Доказать.	$a^{\lg b} = b^{\lg a}$.
Доказательство.	
Запишем очевидное равенство:	$\lg b \lg a = \lg a \cdot \lg b$.
Правило, обратное логарифму степени:	$\lg a^{\lg b} = \lg b^{\lg a}$.
Из равенства логарифмов при равных основаниях имеем:	$a^{\lg b} = b^{\lg a}$.

5. Зная, что $lg2 = a$; $lg3 = b$; $lg5 = c$, выразить через a, b, c $lg6$; $lg30$; $lg16$.	
Решение.	
Применим правила логарифмирования произведения степени:	$lg6 = lg(2 \cdot 3) = lg2 + lg3 = a + b$; $lg30 = lg5 + lg6 = a + b + c$; $lg16 = lg2^4 = 4lg2 = 4 \cdot a$.
6. Вычислить.	$log_9 5 \cdot log_{25} 27$.
Решение.	
Перейдём к основанию 10:	$\frac{lg5}{lg9} \cdot \frac{lg27}{lg25} =$
Используем свойство $log_a b^m = m log_a b$ и сократим дробь:	$= \frac{lg5}{lg3^2} \cdot \frac{lg3^3}{lg5^2} = \frac{lg5 \cdot 3lg3}{2lg3 \cdot 2lg5} = \frac{3}{4}$.
Ответ:	$log_9 5 \cdot log_{25} 27 = \frac{3}{4}$.
7. Вычислить.	$log_{30} 8$, если $lg5 = a$, $lg3 = b$.
Решение.	
Перейдём к основанию 10:	$log_{30} 8 = \frac{lg8}{lg30} = \frac{lg2^3}{lg(3 \cdot 10)} =$
Применим правила логарифмирования степени, произведения, частного: $2 = \frac{10}{5}$	$= \frac{3lg2}{lg3 + lg10} = \frac{3lg2}{lg3 + 1} = \frac{3lg\frac{10}{5}}{lg3 + 1} =$ $= \frac{3(lg10 - lg5)}{lg3 + 1} = \frac{3(1 - lg5)}{lg3 + 1} =$
Подставим $lg5 = a$; $lg3 = b$:	$= \frac{3(1-a)}{b+1}$.
Ответ:	$\frac{3(1-a)}{b+1}$.
Основные методы решения логарифмических уравнений. Применение определения логарифма	
1. Решить уравнение.	$log_2(x-3) = 4$.
Решение.	
По определению логарифма имеем:	$x - 3 = 2^4$.
Решим полученное уравнение:	$x - 3 = 16$; $x = 19$.
Запишем ответ:	19.

2. Решить уравнение.	$\log_x(2x^2-3x-4)=2$.
Решение.	
Заменим равносильной системой по схеме $\log_{f(x)}g(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases}(f(x))^b=g(x)\\f(x)>0\\f(x)\neq 1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2=2x^2-3x-4,\\x>0;\\x\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow$
Решим квадратное уравнение, выберем корни, удовлетворяющие условию $x\neq 1;\ x>0$:	$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-4=0\\x>0\\x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1\end{array}\right.\\x>0\\x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x=4.$
Запишем ответ:	4.
Метод потенцирования	
1. Решить уравнение.	$\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$.
Решение.	
Заменим равносильной системой:	$\begin{cases}x^2-4x-5=7-3x;\\7-3x>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-12=0;\\x<\frac{7}{3}.\end{cases}$
Решим уравнение и выберем те корни, которые удовлетворяют условию $x<\frac{7}{3}$:	$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4;\\x=-3;\end{array}\right. \Rightarrow x=-3.\\x<\frac{7}{3};\end{cases}$
Запишем ответ:	-3.
2. Решить уравнение.	$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$.
Решение.	
Число 2 представим в виде десятичного логарифма:	$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=\lg 100$.
Сумму логарифмов заменим логарифмом произведения выражений:	$\lg((x-9)(2x-1))=\lg 100$.
Заменим равносильной системой, учитывая ОДЗ: $\begin{cases}x-9>0\\2x-1>0\end{cases}$	$\begin{cases}(x-9)(2x-1)=100;\\x-9>0;\\2x-1>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-19x+9=100;\\x>9;\\x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=13;\\x=-3,5\end{array}\right. \Rightarrow x=13.\\x>9\end{cases}$
Ответ:	13.

Приведение логарифмического уравнения к алгебраическому путём замены	
Решить уравнение.	$\frac{1}{12}lg^2x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}lgx.$
Решение.	
Сделаем замену $lgx = t$:	$lgx = t,\ x > 0$ $\frac{1}{12}t^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t$
Решим полученное квадратное уравнение относительно t:	$t^2 = 4 - 3t;$ $t^2 + 3t - 4 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} t = -4; \\ t = 1. \end{array}\right.$
Вернёмся к замене, решим совокупность логарифмических уравнений:	$\left[\begin{array}{l} lgx = -4, \\ lgx = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 10^{-4}, \\ x = 10; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0,0001; \\ x = 10. \end{array}\right.$
Запишем ответ:	$10;\ 0,0001.$
Приведение логарифмического уравнения к одному основанию	
Решить уравнение.	$log_4x + log_{\frac{1}{16}}x + log_8x^3 = 5.$
Решение.	
Приведём все логарифмы к основанию 2:	$\frac{1}{2}log_2x - \frac{1}{4}log_2x + log_2x = 5,\ x > 0.$
Приведём подобные слагаемые:	$\frac{5}{4}log_2x = 5.$
Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{4}$ и решим полученное уравнение:	$log_2x = 4;$ $x = 2^4;$ $x = 16.$
Запишем ответ:	$16.$
Логарифмирование обеих частей уравнения	
Решить уравнение.	$x^{lgx} = \frac{100}{x}.$
Решение.	
Найдём ОДЗ:	$x > 0.$
Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, использовав свойство логарифма степени и частного:	$lgx \cdot lgx = lg100 - lgx;$ $lg^2x = 2 - lgx;$ $lg^2x + lgx - 2 = 0.$
Решим квадратное уравнение относительно lgx:	$\left[\begin{array}{l} lgx = -2; \\ lgx = 1. \end{array}\right.$
Решим совокупность логарифмических уравнений:	$\left[\begin{array}{l} x = 10^{-2}, \\ x = 10; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0,01 \\ x = 10. \end{array}\right.$
Запишем ответ:	$0,01;\ 10.$

Применение монотонности при решении логарифмических уравнений	
Решить уравнение.	$\log_5(x+3) = 3-x$.
Решение.	
Установим монотонность функций в левой и правой частях:	$y = \log_5(x+3)$ — возрастающая функция; $y = 3-x$ — убывающая.
Подбором найдем корень:	$x = 2$, проверка: $\log_5 5 = 3-2$; $1 = 1$; $x = 2$ — корень.
Запишем ответ:	2.
Решение логарифмических неравенств	
Решить неравенство.	$\log_2(x^2+3x) \le 2$.
Решение.	
Запишем число 2 в виде логарифма с основанием $2:2 = \log_2 4$:	$\log_2(x^2+3x) \le \log_2 4$.
Установим монотонность функции:	$2>1$; $y = \log_2 t$ — возрастает.
Заменим равносильной системой:	$\begin{cases} x^2+3x \le 4; \\ x^2+3x > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \le 0, \\ x(x+3) > 0; \end{cases} \Rightarrow$
Решим каждое неравенство и найдём общее решение:	$\begin{cases} (x+4)(x-1) \le 0; \\ x(x+3) > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 1; \\ \left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x < -3; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$  $x \in [-4;-3) \cup (0;1]$.
Запишем ответ:	$[-4;-3) \cup (0;1]$.
Решить неравенство.	$\log_{x-3}(x-1) < 2$.
Решение.	
Решим совокупность двух систем неравенств:	$\log_{x-3}(x-1) < \log_{x-3}(x-3)^2$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 > 1, \\ x-1 < (x-3)^2, \\ x-1 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ x-1 > (x-3)^2; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4, \\ x^2-7x+10 > 0, \\ x > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x^2-7x+10 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4, \\ (x-2)(x-5) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 < x < 4 \\ (x-2)(x-5) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 2 < x < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ 3 < x < 4 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (3;4) \cup (5;+\infty)$.
Запишем ответ:	$(3;4) \cup (5;+\infty)$.

Решить неравенство.	$\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.
Решение.	
ОДЗ:	$x > 0$.
Заменим $\log_{0,5} x = t$, методом интервалов решим неравенство:	$t^2 + t - 2 \le 0$ $(t+2)(t-1) \le 0$ $-2 \le t \le 1$ 
Вернёмся к замене и решим систему логарифмических неравенств с учётом ОДЗ:	$\begin{cases} t \ge -2, \\ t \le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x \ge -2 \\ \log_{0,5} x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ x \ge 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$ учитывая ОДЗ $x > 0$, $\begin{cases} 0 < x \le 4, \\ x \ge \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
Запишем ответ:	$\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
Решить неравенство.	$\log_{0,4} x + \log_{0,4}(x-1) \ge \log_{0,4}(x+3)$.
Решение.	
Сумму логарифмов заменим логарифмом произведения с учётом ОДЗ:	$\begin{cases} \log_{0,4}(x \cdot (x-1)) \ge \log_{0,4}(x+3) \\ x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \end{cases} \Rightarrow$
Составим систему неравенств с учётом ОДЗ и того, что $y = \log_{0,4} t$ — убывающая функция:	$\Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \le (x+3) \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x \le x + 3 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0; \\ x > 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) \le 0, \\ x > 1. \end{cases}$  $1 < x \le 3$
Запишем ответ:	$(1;3]$.
Решить неравенство.	$(3-2x)\log_{0,1} x < 0$.
Решение.	
Данное неравенство решим методом интервалов.	
Найдём ОДЗ:	$x > 0$.
Нули функции $y = (3-2x)\log_{0,1} x$:	$(3-2x) \cdot \log_{0,1} x = 0$; $\left[\begin{array}{l} 3 - 2x = 0; \\ \log_{0,1} x = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1,5, \\ x = 1. \end{array}\right.$
На числовую прямую нанесём ОДЗ и нули функции. Установим знак функции на каждом промежутке ОДЗ:	
Запишем ответ:	$(1;1,5)$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать равенства в виде логарифмических.

а) $2^4 = 16$; б) $10^3 = 1000$; в) $3^0 = 1$; г) $125^{\frac{1}{3}} = 5$; д) $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

2. Записать равенства в виде показательных.

а) $\log_2 64 = 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$; в) $\lg 0,01 = -2$; г) $\log_5 25 = 2$.

3. Проверить верность равенств.

а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; г) $\log_7 49 = 2$; д) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$.

4. Найти логарифмы чисел.

а) 27; 1; $\frac{1}{3}$; 81; $\frac{1}{27}$; 9; $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ по основанию 3; $\frac{1}{3}$;

б) 2; 4; $\frac{1}{4}$; 32; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; 0,5; 0,125 по основанию 2; $\frac{1}{2}$.

5. Найти x.

а) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$; д) $\log_3 x = -2$; и) $\log_x \frac{1}{64} = -3$; н) $\log_x 5 = 1$.

б) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49} = x$; е) $\log_{0,1} x = -1$; к) $\log_x 64 = -2$;

в) $\log_5 x = 0$; ж) $\log_5 x = \frac{3}{4}$; л) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$;

г) $\log_2 x = 5$; з) $\log_9 x = 1$; м) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$;

6. Решить уравнение.

а) $\log_5 x = \frac{2}{3}$; в) $3\log_3 x - 2\log_3 x = 2$; д) $\log_x 9 = 0,5$;

б) $\log_2 x = 0,6$; г) $\log_x \frac{1}{25} = 0,5$; е) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$.

7. Вычислить.

а) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$; в) $7\log_{\frac{1}{8}} 2 + 4\log_2 16$; д) $\log_a tg40° \cdot \log_a tg41° \cdot \ldots \cdot \log_a tg50°$.

б) $\log_2 \log_2 16$; г) $\log_2 \log_3 81$;

8. Вычислить.

а) $7^{\log_7 8}$; в) $5^{2\log_5 3}$; д) $36^{\log_6 5}$; ж) $4^{2-\log_4 5}$; и) $2^{2\log_2 5 + \log_2 3}$.

б) $3^{-\log_3 3}$; г) $9^{\log_3 7}$; е) $25^{-\log_5 10}$; з) $5^{\log_5 10 - 2}$;

9. Представить число:

а) 3 в виде степени числа 2;

б) 10 в виде степени числа 5;

в) a в виде степени числа b.

10. Известно, что $\log_5 2 = a$; $\log_5 3 = b$. Выразить через a и b.

а) $\log_5 36$; б) $\log_5 12$; в) $\log_5 72$; г) $\log_5 30$.

11. Прологарифмировать выражения.

а) $x = 2ab$; в) $x = \frac{5mn}{6a}$; д) $x = \frac{a^4b^2}{5m^3}$; ж) $x = a^3\sqrt{b}$; и) $x = m\sqrt{m}$;

б) $x = 4a^2b$; г) $x = \frac{3a}{4c^2d}$; е) $x = \sqrt{a}\cdot b$; з) $x = \sqrt[3]{ab}$; к) $x = \frac{a^2\sqrt{bc^2}}{3mn^4}$.

12. Найти x.

а) $\log x = \log 2 + \log 5$; г) $\log x = 2\log a + \log b$; ж) $\log x = \frac{3}{4}\log a - \log 7 - \log b$;

б) $\log x = \log a - \log 3$; д) $\log x = 3\log a - 2\log b$; з) $\log x = \frac{1}{2}\log a - \frac{3}{4}\log b + \log c$.

в) $\log x = 4\log a$; е) $\log x = \frac{1}{5}\log 11 - \log 2$;

13. Вычислить.

а) $\log_6 4 + \log_6 9$; в) $\log_a 4 + \log_a 0,25$; д) $\lg tg3° + \lg tg87°$.

б) $\lg 2\frac{1}{2} - \lg 250$; г) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$;

14. Представить логарифмы по основанию 5.

а) $\log_4 5$; б) $\log_{11} 7$; в) $\log_{25} 3x$.

15. Вычислить.

а) $\log_3 5 \log_{25} 27$; $\log_{\frac{1}{2}} 28$, если $\log_7 2 = a$;

б) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$;

в) $\log_2 5 \cdot \log_{25} 8$; $3^{\frac{2}{\log_5 3}}$; $3^{\log_{\sqrt{3}} 10}$.

16. Найти область определения функции.

а) $y = \log_2(x^2+1)$; г) $y = \lg|x|$; ж) $y = \lg\cos 2x$; к) $y = \frac{\lg(x^2+2x)}{\lg(x-5)}$.

б) $y = 2\log_a x$; д) $y = \lg(x^2+x-2)$; з) $y = \log_a \sqrt{x}$;

в) $y = \log_a x^2$; е) $y = \lg\sin x$; и) $y = \lg\frac{5-x}{x-3}$;

17. Построить график функции.

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = \log_2(x-1)$; д) $y = |\log_2 x|$;

б) $y = \log_2 x - 1$; г) $y = \log_2|x|$; е) $y = \log_2(-x)$.

18. Найти нули функции.

а) $y = \log_a(-x)$; б) $y = \lg(4-x)$; в) $y = \lg(x^2-4)$; г) $y = \lg\sin\frac{x}{2}$; д) $y = \lg\arcsin x$.

19. Найти наименьшее целое значение аргумента из области определения функции.

а) $y = \lg\left(x + \frac{4x+3}{x}\right)$; б) $y = \log_3\left(x - \frac{15}{x+2}\right)$.

20. Найти область определения функции.

а) $y = \dfrac{1}{lg\left(\dfrac{3-x}{x-5}\right)}$; б) $y = \sqrt{2x+3} + lg(4-x^2)$;

в) $y = arccos\dfrac{x-5}{5} + log_3\dfrac{x-1}{3-x}$; г) $y = arcsin\dfrac{x-1}{2} + lg(x^2-5x+6)$.

21. Сравнить числа.

а) $log_2 5$ и $log_2 6$; б) $log_{\frac{1}{3}} 2$ и $log_{\frac{1}{3}} 4$; в) $log_5 \frac{1}{2}$ и $log_5 \frac{1}{3}$.

22. Сравнить числа m и n, если:

а) $log_4 m < log_4 n$; б) $log_{\frac{1}{2}} m < log_{\frac{1}{2}} n$.

23. Решить неравенство относительно x.

а) $log_2 x > log_2 3$; в) $log_{\frac{1}{3}} x \geq log_{\frac{1}{3}} 2$; д) $lg(x^2-1) \geq lg(4x+4)$;

б) $log_3 x^2 > log_3 4$; г) $log_{\frac{1}{2}}(3x) \leq log_{\frac{1}{2}} 6$; е) $lg_{0,1}(1-x^2) > log_{0,1}(2x+2)$.

24. Какие из данных чисел положительные, а какие — отрицательные?

$log_2 5$; $log_{\frac{1}{2}} 5$; $log_7 1$; $log_{\frac{\pi}{3}} 4$; $log_2 \frac{1}{3}$; $log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$; $log_\pi 3$; $log_{\frac{\pi}{4}} 4$?

25. Сравнить с единицей число x, если:

а) $log_2 x = -0,1$; б) $log_{\frac{1}{2}} x = 1,4$; в) $lgx = 0,2$.

26. Решить уравнение графически.

а) $2x^2 = log_2 x$; б) $log_3 x = -x+4$; в) $2^x = log_{\frac{1}{2}} x$.

27. Решить уравнение.

а) $lgx^2 = 0$; е) $log_x(x+6) = 2$; л) $log_2(x-1) = log_2(x^2-x-16)$;

б) $log_3 sinx = 0$; ж) $lg(log_3 x) = 0$; м) $lg(2x+1) = lg(2-x)$;

в) $log_2 cosx = -\frac{1}{2}$; з) $lg(lg^2 x) = 0$; н) $2lg\sqrt{x} = lg(15-2x)$;

г) $log_3 tg3x = \frac{1}{2}$; и) $2log_x 2 + log_x 3 = 2$; о) $2lgx = -lg(6-x^2)$.

д) $log_{36}(x^2-10) = \frac{1}{2}$; к) $log_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$;

28. Решить уравнение.

а) $lg(x+1) + lg(x-1) = lg3$; к) $2log^2_{\frac{1}{3}} x - 5log_3 x = 7$;

б) $lg(x-1) = 0,5lg(1+1,5x)$; л) $\dfrac{1}{5-lgx} + \dfrac{2}{1+lgx} = 1$;

в) $lg(x-4) + lg(x+5) = 1$; м) $log_2 x + 2log_x 2 = 3$;

г) $lg(x+2) - lg5 = lg(x-6)$; н) $log_3 x + log_9 x = \frac{27}{2}$;

д) $\log_3(x+5)-\log_3(3x+25)=\log_3(x-5)-\log_3 17$;

е) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

ж) $0,5\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

з) $\log_3(2\sin x)+\log_3\cos x=0$;

и) $\log_3^2 x-3\log_3 x-10=0$;

о) $\log_2 x+2\log_4 x+3\log_8 x=9$;

п) $x^{2\lg x+3}=0,1$;

р) $x^{\log_2 x}=4x$;

с) $5^{3\lg x}=12,5x$;

т) $0,1x^{\lg x-2}=100$.

29. Решить уравнение графически.

а) $\log_2 x=\frac{x}{2}$; б) $\log_2 x=x-1$; в) $\log_2(x+3)=3-x$.

30. Решить уравнение.

а) $3^{\log_3(x-7)}=\log_4 64$;

б) $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$;

в) $\log_{\sqrt{2}}\log_2\log_4(x-15)=0$;

г) $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x$;

д) $\frac{17-\lg x}{4\lg x}=4\lg x$;

е) $\log_2\sqrt{(1-x)^2}=3$;

ж) $\lg(x^2+9x)+\lg\frac{x+9}{x}=0$.

31. Решить неравенство.

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6)>2$;

б) $\log_3(x-2)>1$;

в) $\log_8(x^2-4x+3)<1$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)\geq -1$;

д) $\log_{x^2}(3-2x)>1$;

е) $\log_{x-1}4>1$;

ж) $\log_{x+1}(x-2)<0$;

з) $\log_5(2x-1)>\log_5(3x+2)$;

и) $\log_{0,5}(2x+3)<\log_{0,5}(4x-1)$;

к) $\log_{0,25}(x-1)+\log_{0,25}(x+1)>\log_{0,25}3$;

л) $\log_2(x+3)-2\log_2 4>0$;

м) $\lg^2 x+6<5\lg x$;

н) $\lg^2 x+\lg x>2$;

о) $\log_3 x+\log_x 9>2$;

п) $\log_{0,3}x+\log_{0,3}(x+1)\geq\log_{0,3}(8-x)$;

р) $\frac{\log_2(x+1)}{x-1}>0$;

с) $(x-1)\cdot\log_2(x^2-4x+3)<0$;

т) $2^{x-2}>5$;

у) $\log_{\frac{1}{12}}(x^2-8x+12)>-1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Вычислить.		
а) $\log_6 12 + \log_6 3$; б) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$; в) $\frac{lg9}{lg3}$; г) $\log_2 \log_2 2$; д) $2^{1+\log_2 7}$.		а) $\log_{36} 84 - \log_{36} 14$; б) $\log_{12} 7 + \log_{12} 2$; в) $\frac{lg5}{lg25}$; г) $\log_3 (3\log_3 8)$; д) $3^{1+\log_3 9}$.
2. Найти x.		
$lgx = \frac{1}{2}lga - 3lgb + 4lgc$.		$lgx = \frac{1}{3}lga + 2lgb - 3lgc$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Вычислить.		
а) $lg34 - lg3,4$; б) $lg25 + lg4$; в) $\frac{lg27 + lg12}{lg2 + 2lg3}$; г) $\log_{128} 16$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} \cos\frac{\pi}{6}}$.		а) $\log_8 16 + \log_8 4$; б) $\log_3 33 - \log_3 11$; в) $\frac{lg81 + lg64}{2lg3 + 3lg2}$; г) $\log_{625} 125$; д) $0,2^{\log_5 \cos\frac{\pi}{3}}$.
2. Найти x.		
$\log_4 x = 2 - \log_4 2$.		$\log_3 x = \frac{1}{2}\log_3 4 + 2$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Вычислить.		
а) $3lg5 + \frac{1}{2}lg64$; б) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$; в) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$; г) $\log_{\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{4}$; д) $7^{\log_{11} 2} - 2^{\log_{11} 7}$.		а) $2lg5 + \frac{1}{2}lg16$; б) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$; в) $\log_{60} 27$, если $\log_{60} 2 = a$, $\log_{60} 5 = b$; г) $\log_{\sqrt{3}} tg\frac{\pi}{6}$; д) $2^{\log_3 11} - 11^{\log_3 2}$.
2. Найти x.		
$\log_\pi x = \log_\pi tg28° + \log_\pi tg62°$.		$lgx = lg(2sin15°) + lgcos15°$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-2

B-I	7 баллов	B-II
1. Построить график функции.		
$y = \log_3 x - 2$.		$y = \log_3(x+2)$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \lg(5-x)(x+2)$.		$y = \lg\frac{x-5}{3-x}$.
3. Определить знак числа.		
$\log_2 3$.		$\log_{\frac{1}{2}} 7$.
4. Сравнить.		
$\log_2 5 + \log_2 7$ и $\log_2(5+7)$.		$\lg 12 - \lg 5$ и $\lg 5 - \lg 2$.

B-III	9 баллов	B-IV
1. Построить график функции.		
$y = \log_{\frac{1}{3}}\lvert x\rvert$.		$y = \lvert\log_3(-x)\rvert$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \frac{1-x}{\log_3(x^2-9)}$.		$y = \log\frac{x}{x^2-4}$.
3. Определить знак числа.		
$\log_2 3 + \log_2 0,09$.		$\log_{\frac{1}{7}} 5 - \log_{\frac{1}{7}} 0,1$.
4. Сравнить.		
$\log_8 9$ и $\log_9 8$.		$\log_{\frac{1}{4}} 5$ и $\log_3 7$.

B-V	12 баллов	B-VI
1. Построить график функции.		
$y = \lvert\lvert\log_3 x - 1\rvert - 1\rvert$.		$y = \lvert\log_2 x - 2\rvert - 1$.
2. Найти область определения функции.		
$y = \frac{1}{\lg(x-3)} + \sqrt{7-x}$.		$y = \frac{1}{\lg(x+2)} + \sqrt{3-x}$.
3. Определить знак числа.		
$\log_{\sqrt{3}} 3 - 3$.		$\lg 3 - \frac{1}{3}$.
4. Сравнить.		
$\log_{\frac{1}{2}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 9$.		$\log_7 8$ и $\log_5 8$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-3

В-I	7 баллов	В-II
1. Решить уравнение.		
а) $\log_4(5x+1) = 2$; б) $\lg(2x-1) = \lg(x+1)$.		а) $\log_2(3x-1) = 3$; б) $\lg(3x+5) = \lg(5x+1)$.
2. Решить неравенство.		
а) $\log_{\frac{1}{4}} x > -1$; б) $\log_2(2x+1) > \log_2(x-2)$.		а) $\log_{\frac{1}{3}} x < -2$; б) $\log_5(3x+1) > \log_5(x-3)$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Решить уравнение.		
а) $\log_2(x^2-3x+10) = 3$; б) $\log_5(x^2+2x-3) - \log_5(x-1) = 0$.		а) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1) = -2$; б) $\log_5(x^2+3x-10) - \log_5(x-2) = 0$.
2. Решить неравенство.		
а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5) > -3$; б) $\lg(x^2-5x) < \lg(5x-24)$.		а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) > -2$; б) $\lg(11x-12) > \lg(x^2+4x)$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить уравнение.		
а) $\log_{x-1}(2x^2-5x-3) = 2$; б) $\log_3 \frac{x+1}{x} = \log_3 \frac{x}{2-x}$.		а) $\log_{x+1}(2x^2+5x-3) = 2$; б) $\log_4(x^2+3x-4) = \log_4 \frac{x-1}{x+4}$.
2. Решить неравенство.		
а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x+1} > -1$; б) $\log_{2x+4}(x^2-x) > 1$.		а) $\log_{0,5} \frac{x-4}{x+3} \le -2$; б) $\log_{3x+1}(x^2-4) > 1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С-6-4

В-I	7 баллов	В-II
1. Решить уравнение.		
а) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$; б) $\log_3 \log_3 x = 1$.		а) $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$; б) $\log_2 \log_2 x = 1$.
2. Решить неравенство.		
$\log_7 x + \log_7 (x-1) > \log_7 2$.		$\log_5 x + \log_5 (x+1) > \log_5 2$.

В-III	9 баллов	В-IV
1. Решить уравнение.		
а) $\lg^2 x^2 - 3\lg x^2 = 4$; б) $\log_2 \log_2 \log_4 (x-15) = 0$.		а) $\lg^2 x^2 + \lg x^2 = 6$; б) $\lg \log_2 \log_3 (\sqrt{x}+1) = 0$.
2. Решить неравенство.		
$\log_3 (x+3) - \log_3 (x-1) > 1 - \log_3 (4-x)$.		$\log_2 (x+2) - \log_2 (x-1) < 1 - \log_2 (5-x)$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Решить уравнение.		
а) $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$; б) $\dfrac{2\log_2 (-x)}{\log_2 (-4-5x)} = 1$.		а) $5 - 2\lg x = 3\sqrt{\lg x}$; б) $\dfrac{2\log_3 (-x)}{\log_3 (-3-4x)} = 1$.
2. Решить неравенство.		
$\dfrac{\log_2 (x-1)}{x-3} \le 0$.		$\dfrac{x-5}{\log_3 (x-2)} \ge 0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА К-6-1

В-I	7 баллов	В-II
1. Вычислить.		
$2\log_5 25 + 3\log_2 64$.		$2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + 3\log_3 27$.
2. Решить уравнение графически.		
$\log_3 x = 1 - x$.		$x - 4 = \log_{\frac{1}{3}} x$.
3.Решить уравнение.		
$\log_2(x^2 - 6x + 9) = 2$.		$\log_3(x^2 - 8x + 16) = 2$.
4. Решить неравенство.		
$\lg(x^2 - 2x - 7) > 0$.		$\lg(x^2 - 3x - 18) > 1$.
5. Найти область определения функции.		
$y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \lg(x+10)$.		$y = \lg(x-4) + \lg(20-x)$.

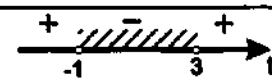
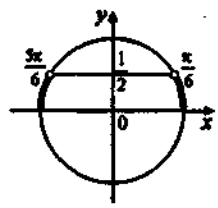
В-III	9 баллов	В-IV
1. Вычислить.		
$2\log_{\frac{1}{24}} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$.		$3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$.
2. Решить уравнение графически.		
$x - 1 = 3\log_4 x$.		$x - 4 = -2\log_2 x$.
3.Решить уравнение.		
$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$.		$\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$.
4. Решить неравенство.		
$\log_x(x^2 - 7x + 13) > 0$.		$\log_{x-2}(2x-9) < 0$.
5. Найти область определения функции.		
$y = \lg\left(\frac{x-1}{x^2+3x+2}\right)$.		$y = \lg\frac{x^2-6x+8}{x^2+9x+20}$.

В-V	12 баллов	В-VI
1. Вычислить.		
$\log_2 3 \cdot \log_3 4$.		$\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.
2. Решить уравнение графически.		
$\log_2 x = \sqrt{3-x}$.		$\log_{0,5} x = -\frac{2}{x}$.
3.Решить уравнение.		
$\log_4(x+10) + \frac{1}{4}\log_4 x^4 = \log_4 24$.		$\log_3(x+8) + \frac{1}{2}\log_3 x^2 = 2$.
4. Решить неравенство.		
$\log_{\lvert x-2\rvert}(2x^2 - 3x + 1) \le 0$.		$\log_{\lvert x+2\rvert}(2x^2 + 3x + 1) \le 0$.
5. Найти область определения функции.		
$y = \lg(2 + 3x - 5x^2) - \arccos\frac{x-2}{5}$.		$y = \log_2(6 - x - 2x^2) + \arcsin\frac{x+1}{2}$.

СТРАНИЧКА АБИТУРИЕНТА

1. Вычислить.	$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$.
Решение.	
Перейдём к основанию 10 и сократим дроби:	$\frac{lg2}{lg3} \cdot \frac{lg3}{lg4} \cdot \ldots \cdot \frac{lg8}{lg9} \cdot \frac{lg9}{lg10} = \frac{lg2}{lg10} = lg2$.
Ответ:	$lg2$.
2. Вычислить.	$\log_6 16$, если $\log_{12} 2 = a$.
Решение.	
$\log_{12} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 12} = \frac{\log_6 2}{\log_6 6 + \log_6 2} = \frac{\log_6 2}{1 + \log_6 2}$; $\frac{\log_6 2}{1 + \log_6 2} = a$; отсюда $\log_6 2 = \frac{a}{1-a}$; $\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4a}{1-a}$.	
Ответ:	$\frac{4a}{1-a}$.
3. Решить уравнение.	$lg(2x) = \frac{1}{4} lg(x-15)^4$.
Решение.	
Найдём ОДЗ:	$x > 0$; $x \neq 15$.
В показателе чётная степень:	$lg(2x) = lg\lvert x-15\rvert$ $2x = \lvert x-15\rvert$
Раскроем модуль на области определения уравнения:	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<15;\\2x = 15-x;\end{cases}\\\begin{cases}x>15;\\2x = x-15\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<15;\\x = 5;\end{cases}\\\begin{cases}x>15\\x = 15\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 5\\x \in \varnothing\end{array}\right. \Rightarrow x = 15.$
Запишем ответ:	5.
4. Решить уравнение.	$lg(x-2)^6 = 0$.
Решение.	
Используем свойство логарифма степени, если показатель чётный:	$6lg\lvert x-2\rvert = 0$, $lg\lvert x-2\rvert = 0$, $\lvert x-2\rvert = 1$.
По определению модуля:	$\left[\begin{array}{l}x-2 = 1,\\x-2 = -1;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3,\\x = 1.\end{array}\right.$
Запишем ответ:	1; 3.

5. Решить уравнение.	$5^{\log_5^3 x} + x^{\log_5^2 x} = 0,4.$
Решение.	
ОДЗ:	$x > 0.$
Используем основное логарифмическое тождество:	$(5^{\log_5 x})^{\log_5^2 x} + x^{\log_5^2 x} = 0,4;$ $x^{\log_5^2 x} + x^{\log_5^2 x} = 0,4;$ $2x^{\log_5^2 x} = 0,4;\ 0,4:2 = 0,2 = 5^{-1}.$
Прологарифмируем обе части по основанию 5:	$x^{\log_5^2 x} = 5^{-1}.$
	$\log_5^2 x \cdot \log_5 x = -1 \cdot \log_5 5.$
Решим полученное уравнение:	$\log_5^3 x = -1;$ $\log_5 x = -1;$ $x = 5^{-1}.$
Запишем ответ:	$\frac{1}{5}.$
6. Решить уравнение.	$x\log_3^2 x(2x+3)\log_3 x + 6 = 0.$
Решение.	
Замена $\log_3 x = t,\ x > 0$:	$xt^2 - (2x+3)t + 6 = 0$ — квадратное относительно t.
Решим квадратное уравнение:	$t_{1,2} = \frac{2x+3 \pm \sqrt{(2x+3)^2 - 4 \cdot x \cdot 6}}{2x} =$ $= \frac{2x+3 \pm (2x-3)}{2x}$ $t = 2$ или $t = \frac{3}{x}.$
Вернёмся к замене:	$\log_3 x = 2;\ x = 9.$ $\log_3 x = \frac{3}{x};\ y = \log_3 x$ — возрастающая функция; $y = \frac{3}{x}$ — убывающая, $x = 3$ — единственный корень.
Ответ:	3; 9.

Применение основного логарифмического тождества	
1. Решить уравнение.	$\log_2(9-2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.
Решение.	
ОДЗ:	$\begin{cases} 3-x>0; \\ 9-2^x>0; \end{cases} \begin{cases} x<3, \\ 2^x<9, \end{cases} \Rightarrow x<3.$
В правой части используем $a^{\log_a b} = b$:	$\log_2(9-2^x) = 3-x.$
По определению логарифма:	$2^{3-x} = 9-2^x; \Rightarrow 2^{2x} - 9\cdot 2^x + 8 = 0.$
Квадратное уравнение относительно 2^x:	$2^x = 1$; $2^x = 8$, откуда $x = 0$; или $x = 3$ — не принадлежит ОДЗ.
Ответ:	0.
2. Решить уравнение.	$x - 1 + \log_4 3 = \log_4(5^x - 4^{x-1})$.
Решение.	
По определению логарифма имеем:	$4^{x-1+\log_4 3} = 5^x - 4^{x-1}$.
$4^{\log_4 3} = 3$ Решим показательное уравнение:	$4^{x-1}\cdot 4^{\log_4 3} = 5^x - 4^{x-1}$; $3\cdot 4^{x-1} = 5^x - 4^{x-1}$; $3\cdot 4^{x-1} + 4^{x-1} = 5^x$; $4\cdot 4^{x-1} = 5^x$; $4^x = 5^x$; $x = 0$.
Ответ:	0.
3. Решить неравенство.	$(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x)$.
Решение.	
ОДЗ:	$0 < \sin x < 1$.
Преобразуем правую часть:	$\log_{\sin x}(4\sin^3 x) = 2\log_{\sin x} 2 + 3\log_{\sin x}\sin x =$ $= 2\log_{\sin x} 2 + 3.$
Неравенство запишем так:	$\log^2_{\sin x} 2 < 2\log_{\sin x} 2 + 3$.
Замена $\log_{\sin x} 2 = t$:	$t^2 < 2t + 3$; $t^2 - 2t - 3 < 0$. $(t+1)(t-3) < 0$.  $\begin{cases} t>-1 \\ t<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\sin x} 2 > -1; \\ \log_{\sin x} 2 < 3; \\ 0<\sin x<1 \end{cases} \begin{cases} 2<(\sin x)^{-1}; \\ 2>(\sin x)^3; \\ 0<\sin x<1. \end{cases} \begin{cases} 2<\frac{1}{\sin x}; \\ 2>\sin^3 x; \\ 0<\sin x<1. \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ x \in R \\ 0<\sin x<1 \end{cases}$  $2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$
Ответ:	$\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), \quad n \in Z.$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ АБИТУРИЕНТА

1. Упростить: $2^{\frac{lg\,lg2}{lg2}}$.

2. $log_{15}3 = a$, $log_{15}2 = b$. Вычислить $log_5 90$.

3. Вычислить $log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 7 \cdot log_7 9$.

4. $log_{\frac{1}{3}}(12 - 3^x) = x - 3$.

5. $5^{1+log_5 x} + 5^{1-log_5 x} = 26$.

6. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - \sqrt{log_2 x^2}$.

7. $log_2(-sinx) - log_4(cosx) = log_4 3 - \frac{1}{2}$.

8. $6log_{4x}x = 5log_{2x}x$.

9. $log_{x^2+6x+8}(log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x)) = 0$.

10. $log_{2x-x^2}\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0$.

11. $\frac{1 - log_4 x}{1 + log_2 x} \le \frac{1}{2}$.

12. $4 - x < log_2(6 + 2^x)$.

13. $x^{\frac{1}{lgx}} \cdot lgx < 1$.

14. $log_{|sinx|}(x^2 - 8x + 23) > \frac{3}{log_2|sinx|}$.

15. $x^{log_{\sqrt{x}}2x} = 4$.

16. $\sqrt{log_x \sqrt{7x}} \cdot log_7 x = -1$.

17. $log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \le 0$.

18. $log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$.

19. Упростив, решить $log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4}$ неравенство: $log_3(7-x) \le \frac{9}{16}log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} + log_{7-x}9$.

Ответы

Тренировочные упражнения

§ 1.

1. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$. 2. а) 60 см; б) 48 см; в) 10 см; г) 5, 6 см. 3. 18 с. 4. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $\frac{4\pi}{5}$; д) $\frac{\pi}{2}$. 5. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{12}$; 45°; 60°; 75°. 8. а) $|a| \le 7$; б) $|a| \ge \pi$; в) $0 \le a \le 1$; г) b — любое число; д) $-\frac{1}{\pi} \le a \le \frac{1}{\pi}$. 9. а) $2 > 2\sin x$; б) $\sin x < 2\sin x$; в) $\sin x > \sin x \cos x$; г) $2\cos x < 2$; д) $\cos x < 2\cos x$; е) $\cos x > \cos x \sin x$. 10. а) нет; б) нет; в) да; г) да. 11. а) $[0;2]$; б) $[0;2]$; в) $[0;4]$; г) $[2;8]$; д) $[0;1]$; е) $[2;3]$; ж) $[1;+\infty)$; з) $[2,5;3,5]$; и) $[6;7]$; к) $(-\infty;+\infty)$. 12. а) минус; б) минус; в) плюс; г) плюс; д) плюс; е) минус; ж) минус; з) минус. 13. а) 14, 8; б) -3; в) 0; г) 0; д) 0. 14. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) 0; д) 1; е) 0. 15. г) $2\sin 3\alpha \cos 3\alpha$; д) $\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2}$; е) $2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$; з) $\cos^2(45° + \alpha) - \sin^2(45° + \alpha)$; и) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; к) $2\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}$; л) $\cos^2 \frac{\alpha}{6} - \sin^2 \frac{\alpha}{6}$. 17. Чётная: а); б); г); д); к); м); н); о); п). Нечётная: д); ж); з); л). Ни чётная, ни нечётная: в); е). 18. а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 4π; д) 8π; е) 2π; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) 3π; и) 4π; к) π; л) 2π; м) 2π. 19. а) $\sin 0, 3\pi > \sin 0, 7\pi$; б) $\cos 2, 71 > \cos 2, 73$; в) $tg(-2, 6\pi) > tg(-2, 61\pi)$; г) $\cos(-4) > \cos(-3, 1)$; д) $\sin 2 > \sin 5$; е) $tg 2 < tg 1$. 20. а) $y = 4$; $x = 2\pi n$, $n \in Z$; б) $y = 4$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; в) наибольшего значения не существует; г) $y = 5$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; д) $y = -3, 5$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; е) $y = 5$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 21. а) $2\sin \frac{13\alpha}{56} \cos \frac{29\alpha}{56}$; б) $-2\sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\alpha}{24}$; в) $2\cos \frac{11\alpha}{20} \cos \frac{17\alpha}{60}$; г) $2\sin 6\alpha \cos 2\alpha$; д) $4\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \sin 3\alpha$; е) $-\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{11\alpha}{2}$; ж) $4\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2}$; з) $2\sqrt{2}\sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$; и) $4\sin 2\alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$. 23. а) $-1, 75$; б) $-0, 25$; в) 2; г) -1; д) $0, 125$; е) 1. 24. а) $tg \frac{\alpha}{2}$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\frac{1}{2}\sin \alpha$; г) $2\cos 4\alpha$; 1; д) $\sin 4\alpha$; $\frac{1}{2}$; е) $\sin 2\alpha$; $\frac{1}{2}$. 26. а) $x \ne 2\pi n$, $n \in Z$; б) $x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; в) x — любое число; г) x — любое число; д) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; е) $\pi n \le x\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. 27. а) πn, $n \in Z$; б) $\frac{8}{5}\pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{2}{3}\pi n$, $n \in Z$; г) $\frac{2}{3}\pi n$, $n \in Z$.

§ 2.

9. а) $2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $-arctg 3 + \pi n$, $n \in Z$; в) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; г) $arctg 2 + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

е) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. 11. о) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n;\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ n,m\in Z$;

п) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}m;\ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n,\ n,m\in Z$; р) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n;\ \pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k,\ n,k\in Z$;

с) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \pm\frac{5\pi}{12}+\pi m,\ n,m\in Z$. 12. а) $\frac{\pi}{6}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$;

б) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^k arcsin\frac{5}{4}\sqrt{2}+\pi k,\ k\in Z$; в) $-arcsin\frac{3}{5}+(-1)^k arcsin\frac{2}{5}+\pi k,\ k\in Z$;

г) $\frac{\pi}{18}+(-1)^k\frac{\pi}{18}+\pi k,\ k\in Z$; д) $-\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

§ 3.

2. а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{2}{3}\pi+2\pi n$; б) $\frac{2}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{7}{3}\pi+2\pi n$; в) $\frac{4}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{5}{3}\pi+2\pi n$;

г) $\frac{5}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{11}{3}\pi+2\pi n$; д) $\frac{2}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{4}{3}\pi+2\pi n$; е) $\frac{4}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{8}{3}\pi+2\pi n$;

ж) $\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{5}{3}\pi+2\pi n$; з) $\frac{5}{3}\pi+2\pi n\le x\le\frac{7}{3}\pi+2\pi n$. 4. а) $-\frac{\pi}{3}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n$;

б) $\frac{\pi}{3}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n$; в) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le\frac{\pi}{3}+\pi n$; д) $\pi n<x\le\frac{2}{3}\pi+\pi n$;

е) $\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$; ж) $\frac{2}{3}\pi+\pi n\le x<\pi+\pi n$. 5. а) $-arctg2+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

б) $arctg5+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; в) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$; г) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le-\frac{\pi}{6}+\pi n$;

д) $\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$; е) $\pi n<x<\pi-arctg3+\pi n$; ж) $\pi-arctg3+\pi n\le x<\pi+\pi n$;

з) $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\pi+\pi n$; и) $\frac{5}{12}+\pi n<x<\frac{13}{12}\pi+\pi n$; к) $\frac{\pi}{12}+\pi n<x<\frac{5}{12}\pi+\pi n$;

л) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$; м) $-\frac{5}{6}\pi+2\pi n<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi n$; н) $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{12}+\pi n$;

о) $2\pi+4\pi n<x<\frac{10}{3}\pi+4\pi n$. 6. а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5}{3}\pi+2\pi n$;

в) R; г) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. 8. а) $2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ n\in Z$;

б) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}<x<-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; в) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$;

г) $\left(-\frac{5}{6}\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$;

д) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{2}{3}\pi+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{2}{3}\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z$; е) x — любое число, кроме $2\pi n,\ n\in Z$. 9. а) $\left(\frac{\pi}{2}n;\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n;-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n;\frac{\pi}{2}n\right),\ n\in Z$;

в) $\left(-\frac{7}{6}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$; г) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z$;

д) $x\ne\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$; е) $\left(\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$;

ж) $\left[-\frac{9}{4}\pi+6\pi n;-\pi+6\pi n\right)\cup\left(\pi+6\pi n;\frac{9}{4}\pi+6\pi n\right]$, $n\in Z$;

з) $\left[-\frac{5}{3}\pi+4\pi n;-\pi+4\pi n\right)\cup\left(-\pi+4\pi n;-\frac{\pi}{3}+4\pi n\right]$, $n\in Z$; и) πn, $n\in Z$.

10. ж) $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5}{16}\pi+\pi n\right]$;

з) $\left[\frac{3}{8}\pi+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{9}{10}\pi+\pi n\right]\cup\left[\frac{5}{8}\pi+\pi n;\frac{13}{16}\pi+\pi n\right]$;

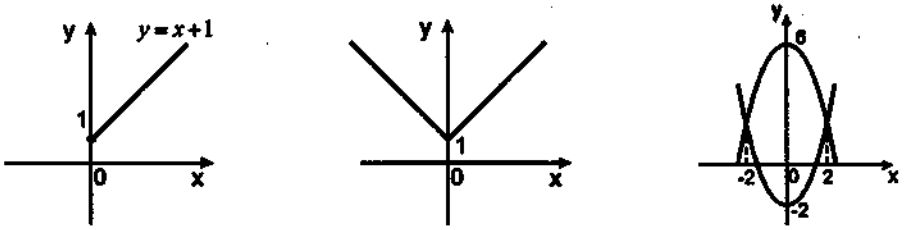
и) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5}{3}\pi+2\pi n\right]$, $n\in Z$; к) $[\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n]$, $n\in Z$.

§ 4.

1. а) $4\sqrt{5}-180$; в) -2; г) 4; д) $\frac{3}{4}$; е) -19. 2. а) 0, 2; б) 32; в) 2. 3. а) 1; б) $-\sqrt{2}$; в) -1

6. Нет. 7. в) $\frac{x^2}{2b^2}$; г) $\sqrt[3]{a^2}$; д) 2.

8. а) б) в)



11. а) $-1+2\sqrt{3}$; б) 5; в) 2; г) 1; д) 4; е) 3; ж) $-4;1$; з) 3; и) 6; к) 7;8; л) $\frac{7+\sqrt{29}}{2}$; м) 3; н) $3;3;1$; о) 2; п) 7; р) $\varnothing$; с) 4. 12. а) $(-1+2\sqrt{3};3)$; б) $(-\infty;-1+2\sqrt{3})$; в) $(5;+\infty)$; г) $\left(\frac{1}{2};5\right)$; д) $(1;+\infty)$; е) $[-3;1)$; ж) 5; з) $(-3;6)$; и) $x\in R$; к) $x\in[4;+\infty)$; л) $(-\infty;8)$; м) $(4;+\infty)$; н) $(3;4]$; п) $(3;5]$; р) $\left[0;\frac{1}{2}\right)$; с) $[0;+\infty)$; т) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$; у) $[2;+\infty)$.

§ 5.

19. а) $x>-8$; б) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; в) $[0;1)$; г) $x\in R$; д) $x\in R$; е) $(2\pi n;\pi+2\pi n)$, $n\in Z$; ж) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; з) $[-1;0)\cup[2;+\infty)$; и) $x\geq 0$; к) $\varnothing$; л) $\left(\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

23. а) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{2}{7};1$; е) 3; ж) 35; л) 3; н) 4;12. 24. а) $\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$; з) $(-\infty;-3]\cup(0;1]$; и) $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; к) $[-1;0)\cup(2;+\infty)$; л) $(13;+\infty)$; м) $(-\infty;-8)\cup(-2;+\infty)$; н) $\left(-2;-\frac{11}{8}\right)\cup(1;+\infty)$. 25. а) 5; г) $\frac{3}{2}$; е) $\frac{\pi n}{2};\frac{\pi k}{3}$, $n,k\in Z$; ж) $x<1$; з) $x\leq 3,5$; и) $x\leq 2$; к) $[-5;5)$; м) $x\geq 16$. 26. а) 3; б) 4; г) $0;\pm\sqrt{3}$; ж) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n;\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n,k\in Z$; и) ± 4. Указание: $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=t;(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=\frac{1}{t}$; $(17\pm 12\sqrt{2})=(3\pm\sqrt{8})^2$; к) 0, 5; л) $x<1$; м) $x>1$; н) $x>\frac{1}{2}$; о) $x>\log_2 3$; п) $(0;36)$; р) $(1;2)$. 27. а) 0; б) $\log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{2}$; $\log_{\frac{2}{5}}2$; в) $\frac{1}{2}$; г) 4; д) $\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{2}+\pi n$, $k,n\in Z$;

е) 1;2; ж) $x \geq -1$; з) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$; и) $(0;1)$. 28. а) 0; б) 1; в) 1; г) –2; д) $x < 7$; е) –3; ж) $x < \frac{3}{2}$; з) $(-2;3)$; и) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$. 29. а) 2; б) 2; в) 3; г) 1; е) 2.

Самостоятельные работы

С - 1 - 1

В - I 3. $\frac{1}{2}$. В - II 3. $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$. В - III 3. $-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}$. В - IV 3. $\frac{7}{25}; -\frac{7}{24}$. В - V 3. $\frac{1}{\sqrt{20}}; \frac{1}{3}$. В - VI 3. $-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{2}$

С - 1 - 2

В - I 1. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2. а) $\sin 2\alpha$; б) 2. В - II 1. 2. 2. а) $\sin 2\alpha$; б) 2. В - III 1. 0. 2. а) 1; б) $-2\sin x$. В - IV 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $tg^4\alpha$. В - V 1. 3. В - VI 1. $\frac{7}{18}$.

С - 2 - 1

В - III в) $\pm\frac{\pi}{5} + \frac{12}{5}\pi n$. В - IV в) $\frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$. В - V г) $\pm\frac{5}{6} + 2n, n \in Z$; д) $\frac{6}{6n+1}, n \in Z$. В - VI г) $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\pi + \pi n, n \in Z$; д) $\frac{6}{\pi - 6n}, n \in Z$.

С - 2 - 2

В - III г) $2\pi k; (-1)^n\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$. В - IV а) $\left(\pm\pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; г) $\pi + 2\pi k; \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n$. В - V а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$; в) $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi k$. В - VI а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $\pm\frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi n$; г) $\frac{\pi}{3}k$.

С - 3 - 1

В - I 1. а) $\varnothing$, б) R. 2. $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in Z$. В - II 1. а) $\varnothing$, б) R. 2. $[2\pi + 4\pi n; 4\pi + 4\pi n], n \in Z$. В - III 1. а) R, б) R. 2. $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$. В - IV 1. а) R, б) R. 2. $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$. В - V 1. а) $\varnothing$, б) R. 2. $\left[\frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right], n \in Z$. В - VI 1. а) R, б) R. 2. $\left[\frac{3\pi}{2} + 3\pi n; 3\pi + 3\pi n\right], n \in Z$.

С - 3 - 2

В - I а) $\left(-\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi n; -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. В - II а) $[-\pi + 8\pi n; \pi + 8\pi n]$; б) $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. В - III а) $\left(-\frac{4}{15}\pi + \frac{2\pi}{5}n; \frac{\pi}{15} + \frac{2}{15}\pi n\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right)$. В - IV а) $\left(-\frac{14}{3}\pi + 14\pi n; \frac{14}{3}\pi + 14\pi n\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n\right]$. В - V а) $\left(-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5} + \pi n; \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5} + \pi n\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}n; \frac{7}{18}\pi + \frac{\pi}{3}n\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$. В - VI а) $\left(3\pi + 3\arcsin\frac{1}{5} + 6\pi n; 6\pi - 3\arcsin\frac{1}{5} + 6\pi n\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n\right]$; в) $\left(\frac{2}{3}\pi n; \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right)$.

С - 4 - 1

В - I 1. а) –2; б) –2. В - II 1. а) –1; б) –1. В - III 1. а) 2; б) 1. 3. a. В - IV 1. а) 3; б) 3. 3. a. В - V 1. а) 46; б) 1. 3. –4. В - VI 1. а) 8; б) –1 3. –1.

С - 4 - 2

В - I а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) $a-\sqrt{ab}+b$. В - II а) -3; б) 8; в) $\frac{1}{a+\sqrt{ab}+b}$. В - III а) -8;

б) $\frac{11(3+2\sqrt{2})}{12}$; в) $2\sqrt{a}$. В - IV а) $\sqrt{x}+1$; б) 0; в) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$. В - V 1. а) 3; б) 3,5. 2. a^{12}.

В - VI 1. а) 1; б) $\frac{16}{5}$. 2. b^{20}.

С - 4 - 3

В - I а) 3; б) $2a$; в) $\sqrt[3]{a}+2$. В - II а) 4; б) $-2a$; в) $2\sqrt[3]{b}+1$. В - III а) 4; б) $2\sqrt{10}-3$; в) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

В - IV а) $\sqrt[5]{-141}$; б) -5; в) 4. В - V а) $2\sqrt{2}$; б) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$; в) $\frac{1}{y\sqrt{xy}}$. В - VI а) $3\sqrt[4]{b}$ при

$b>0, a\neq b$; б) $2\sqrt{2}$ при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$; $2a$ при $a\geq\sqrt{2}$; в) 1.

С - 4 - 4

В - I а) 1; б) 10; в) 8. В - II а) 0; б) 5; в) 3. В - III а) 3; б) 5; в) 8. В - IV а) -2; б) -8; в) 0.

В - V а) 7; б) 0,25; в) 4;5. В - VI а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; в) 1;0.

С - 4 - 5

В - I 1. б) $-0,5$; 2. $x\geq\frac{7}{8}$. В - II 1. а) 8; б) 0. 2. $x>\frac{7}{2}$ В - III 1. а) 5; б) $x\leq 0,5$. В - IV 1. а) 10;

5) $x\leq 1$. 2. а) $x>4$; б) $\frac{7}{8}\leq x<2$. В - V 1. а) 3. 2. а) $3\leq x<3,75$; б) $\left[0;\frac{1}{2}\right]$; в) $[-1;0)$.

В - VI 1. а) 1. 2. а) -3; б) $[1;2)$; в) $[1;2)\cup(3;\infty)$

С - 5 - 1

В - I 3. 1. В - II 3. 2. В - III 3. 0. В - IV 3. 0. В - V 3. 0. В - VI 3. 0.

С - 5 - 2

В - I а) -4; б) 3; в) 0, 1. 2. $[0;6]$. В - II а) -3; б) 1; в) 1. 2. $[-1;2]$. В - III а) $-\frac{1}{2}$; б) 4;

в) $-1;1$. 2. $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{6}\right]$. В - IV а) $-\frac{5}{2}$; б) 0; в) 2. 2. $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right]$. В - V а) $[1;+\infty)$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{2}$.

2. $(-\infty;0)\cup[1;4]$. В - VI а) 0; б) 3; в) $\pi n, n\in Z$. 2. $(-\infty;1]\cup(0;4]$.

С - 6 - 3

В - III 1. а) 1;2. В - IV 1. а) 5;-1. В - V 1. а) 4; б) $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$. В - VI 1. а) 1; б) -5.

С - 6 - 4

В - I 1. а) 3, 9; б) 27. 2. $x>2$. В - II 1. а) $8;\frac{1}{2}$; б) 4. 2. $x>1$. В - III 1. а) $\frac{\sqrt{10}}{10};100$; б) 271.

2. 1, 3. В - IV 1. а) $10^{-\frac{3}{2}}$; 10; б) 64. 2. $(3;5)$. В - V 1. а) 10; б) -4. 2. $[2;3)$. В - VI 1. а) 10;

5) -3. 2. $(2;3)\cup[5;+\infty)$.

Контрольные работы

К - 1 - 1

В - III 2. $\frac{7}{25}$. В - IV 2. 1. В - V 2. $\frac{24}{25}$. В - VI 2. $-\frac{25}{3}$.

К - 2 - 1

В - III б) $180n; 30 + 180k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi m$; д) $\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n$.

В - IV б) $30° + 180°n; \pm 20° + 120°m$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; д) $30° + 90°k; 180° + 360°n$.

В - V б) $2\pi n; \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$; в) $90°$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; д) $\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi n$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k, n \in Z$.

В - VI б) $\frac{2\pi n}{7}; \pi + 2\pi n$; в) $54°$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; д) $\frac{\pi}{4} + \pi k; arctg5 + \pi n$; е) $-\frac{\pi}{5}n; \pm\frac{3}{8}\pi + \pi k$.

К - 3 - 1

В - I а) R. В - II а) R. В - III а) $\varnothing$. В - IV а) $\varnothing$; г) $\left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n\right]$. В - V а) R;

г) $\left[-\frac{5}{8}\pi + \pi n; -\frac{3}{8}\pi + \pi n\right]$. В - VI а) R; г) $\left(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

К - 4 - 1

В - I 1. а) 1; б) 2. 2. $\varnothing$. 3. $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$. В - II 1. а) 4; б) 2. 2. $\varnothing$. 3. $\left(\frac{3}{4}; 1\right]$. В - III 1. а) -5; б) $\frac{2}{b}$.

2. $\varnothing$. 3. $x > 3$. В - IV 1. б) $\frac{2}{x^2}$. 2. -4. 3. $x > 2, x < 0$. В - V 1. $2a + 2x$. 2. а) $-\frac{27}{8}; 1$; б) 2.

3. а) $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup [8; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) 2. В - VI 1. 1. 2. б) 1. 3. а) $\varnothing$; в) $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

К - 5 - 1

В - I а) $\frac{4}{3}$; б) $(-2; 0)$; в) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; г) $(-2; -1)$; д) $-1; 0$; е) $0; 2$; ж) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

В - II а) $1, 5$; б) $(-\infty; -0, 5)$; в) $(-1; 1)$; г) -2; д) 2; е) $-4; 0$; ж) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

В - III а) 4; б) $(-\infty; -0, 5)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; г) $x > 1$; д) $0; 1$; е) 2; ж) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

В - IV а) 6; б) $(-0, 5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; г) $[-2; -1]$; д) $0; \frac{1}{2}$; е) $a > 1; a = 3$;

В - V а) $0, 25$; б) $[-1; 3]$; в) $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$; г) $x < 1$; д) 2; е) 0; ж) $a \in (-\infty; 1) \cup \{3\}$.

В - VI а) 8; б) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; в) $(-3; 0) \cup (3; +\infty)$; г) $x > 0$; д) $-0, 5; 0, 5$; е) $a = 6; a < 3$.

К - 6 - 1

В - III 4. $(1; 3) \cup (4; 8)$. В-IV 4. $(4, 5; 5)$. В-V 1. 2. 3. $(-4; -b)$. В-VI 1. 12. 3. $1; -4 + \sqrt{7}$.

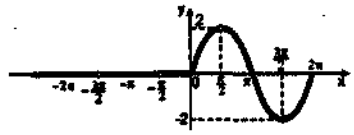
Тренировочные упражнения для абитуриента

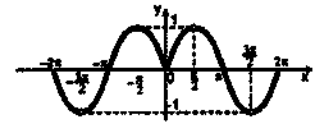
§ 1.

1. а) $sin(\alpha+\beta)sin(\kappa-\beta)$; б) $\frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha sin\beta}$; в) $2sin\frac{30°+\alpha}{2}cos\frac{30°+\alpha}{2}$;

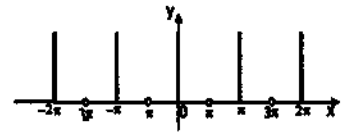
г) $2\sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; д) $\frac{\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{cos\alpha}$. 2. $sin(\alpha+\beta)cos\beta$. 3. а) 0,944; б) 5;

в) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. 5. а) $y=\frac{sin(|x|+x)}{cos|x|};D: x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$; $1^0)\begin{cases}x\geq 0\\ y=\frac{2sinxcosx}{cosx}=2sinx;\end{cases}$

$2^0)\begin{cases}x<0\\ y=0.\end{cases}$ 

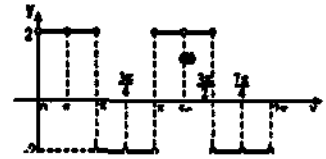
5. б) $y=tg|x|cosx$; $x\neq\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$; $1)\begin{cases}x\geq 0\\ y=sinx;\end{cases}$ $2)\begin{cases}x<0\\ y=-sinx.\end{cases}$ 

5. в, г (аналогично 5. б). 5. д) $|y|=y\sqrt{1+tg^2x}$; $1^0)\ y=0;0=0;x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$;

$2^0)\ y>0;\frac{1}{|cosx|}=1;x=\pi k$; $3^0)\ y<0;\frac{1}{|cosx|}=-1;\varnothing$. 

5. ж) (аналогично 5. д).

5. з) $y=\frac{1-2sin^2x}{sinxcosx}\sqrt{\frac{1}{cos^22x}-1}=\frac{2cos2x}{sin2x}\sqrt{tg^22x}=2ctg2x|tg2x|;x\neq\frac{\pi k}{4}$;

1) I и III четв. $y=2$; 2) II и IV четв. $y=-2$. 

5. и (аналогично 5. з).

§ 2.

1. $x\in\varnothing$. 2. $x\in\varnothing$. 3. $x\in\varnothing$. 4. $x=2\pi m, m\in Z$. 5. $x=2\pi n, n\in Z$. 6. $x=\pi k, k\in Z$.

7. $2\pi k, k\in Z$. 8. $\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$. 9. $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$. 10. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. 11. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

12. $\frac{\pi}{2}-arccos\frac{12}{13}+\pi n, n\in Z; y=2$. 13. $x=2\pi n, n\in Z$. 15. $\varnothing$.

17. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi m, n, m\in Z$. 18. $\frac{\pi}{2}n, n\in Z$. 19. $\frac{3}{2}\pi+2\pi k, k\in Z$.

§ 3.

1. а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5}{6}\pi+\pi n\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right), x\neq\frac{3}{4}\pi+\pi n$; в) $\left[-\frac{7}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n\right], x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

2. г) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$;

д) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right), n\in Z$. 3. а) $\left[\begin{array}{l}\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n;\\ \frac{3}{4}\pi+\pi n<x<\pi+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

б) $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le -\frac{\pi}{3}+\pi n \\ \pi n \le x \le \frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z. \end{cases}$; в) $\begin{cases} -\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{6}+2\pi n, \\ \frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+2\pi n, n \in Z. \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{\pi}{8}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\pi n, \\ \frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{5\pi}{8}+\pi n, \\ \frac{7\pi}{8}+\pi n < x < \pi+\pi n, n \in Z. \end{cases}$

§ 4.

1. а) 3; б) 1;3; в) 5; г) 1; д) 1; е) 5; ж) –1; з) 1;2;10; и) 1; к) 32; л) –2;0; м) –3, 5;0;1, 5.

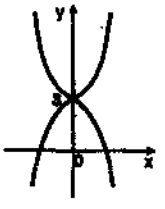
2. а) $a = -1,25; a > -1$; б) $a = 2,25; a < 2$; в) $a = 0,75; a > 1$. 3. а) $\frac{a^2}{4}$, если $a \le 0$ или $a \ge 8$; $\varnothing$, если $0 < a < 8$; б) 0, если $a = 0$; 0 и $\frac{63}{65}a$, если $a \ne 0$. 4. а) $\left[-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right]$;

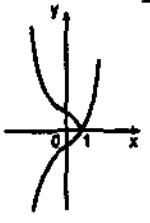
б) $(2-\sqrt{5};0] \cup [4;2+\sqrt{5})$; в) $\left(\frac{63}{13};5\right]$; г) $[-2;-1) \cup [0;1]$; д) $\left[-\frac{15}{4};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$;

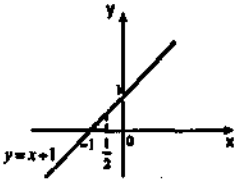
е) $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6};\frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$; ж) $(5;+\infty)$; з) $(-\infty;\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2};+\infty)$;

и) $(-2;-1) \cup \left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$; к) $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, то $x \in [0;a^2]$; $a \in \left(\frac{1}{2};1\right]$, то $[2a-1;a^2]$; при других a неравенство не имеет корней; л) если $a \in \left(\frac{3}{4};1\right]$, то $x \in (x_1;x_2]$,

где $x_1 = -\frac{1}{2}-\sqrt{a-\frac{3}{4}}; x_2 = -\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}$; если $a \in (1;+\infty)$, то $x \in [-a;x_2)$; если $a \le \frac{3}{4}$, то не имеет корней; м) $x \in [-1;1]$, если $a < -1$; $x \in (x_1;1)$, если $a \in [-1;1)$; $x \in (x_1;x_2)$, если $a \in [1;\sqrt{2})$, где $x_1 = \frac{1}{2}(a-\sqrt{2-a^2}); x_2 = \frac{1}{2}(a+\sqrt{2-a^2})$; не имеет корней, если $a \ge \sqrt{2}$.

5. а) 

б) 

в) 

§ 5.

1. а) 25; б) ±2; в) 1; г) 2; д) ±1; е) 0;1;2; ж) –1;2;3;4; з) $\frac{\pi}{8}(1+(-1)^{n+1})+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$;

и) $\frac{\pi}{8}(1+(-1)^n)+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$; к) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z; arctg\sqrt{2}+k\pi, k \in Z$. 2. а) 1;3;4;5; б) $x \in \varnothing$;

в) (3;–2); г) 4; д) 4; е) 0; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$; з) 7; и) 15; к) $\frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

3. а) $(-\infty;4-\sqrt{2}) \cup (4+\sqrt{2};6)$; б) $(1;\log_3 39)$; в) (1;2); г) $(1;+\infty)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$; ж) $[2;+\infty)$; з) $[3;+\infty)$.

§ 6.

1. 2. 2. $\frac{1+a+b}{1-a}$. 3. 2. 4. 1. 5. $\frac{1}{3}$; 3. 6. ±1. 7. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. 8. 1;16. 9. –1. 10. $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

11. $\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup [2;+\infty]$. 12. $(1;+\infty)$. 13. $(0;1) \cup (1;\sqrt[10]{10})$. 14. $(3;\pi) \cup \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};5\right)$.

ISBN 966836879-7

Країна мрій

61146, г. Харьков, а/я 2656,тел. 58-50-70,
e-mail: Optima_2000@rambler.ru